

PARAMETRISCHE INSTABILITÄTEN UND
NICHT EICHINVARIANTE AMPLITUDENGLEICHUNG
IM
PARALLEL GETRIEBENEN FERROMAGNETEN

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von
DIPL.–PHYS. CHRISTINE JUST
aus Darmstadt

Referent: Prof. Dr. H. Sauermann
Korreferent: Prof. Dr. F. Kaiser

Tag der Einreichung: 20. Dezember 2004
Tag der Prüfung: 07. Februar 2005

Darmstadt 2005

D17

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Das Modellsystem	11
2.1	Die Bewegungsgleichung	11
2.2	Das effektive Feld	12
2.3	Stereographische Projektion	13
3	Lineare Stabilitätsanalyse	15
3.1	Stationäre Lösung und Linearisierung	15
3.1.1	Die Stabilität der stationären Lösung im ungetriebenen Fall	16
3.2	Phasenportraits	17
3.2.1	Lösung ohne treibendes Feld	17
3.2.2	Lösung mit treibendem Feld	19
3.3	Floquet–Problem	20
3.3.1	Klassifikationen der Instabilitäten	21
3.4	Determinante und Spur der Evolutionsmatrix	24
3.4.1	Determinante	25
3.4.2	Spur	25

4	Auftreten der Hopf–Instabilität	30
4.1	Hopf–Instabilität	30
4.2	Die Funktion $q(T, 0)$	31
4.2.1	Transformation auf neue Parameter	31
4.2.2	Graphische Darstellung der Funktion $q(T, 0)$	32
4.3	Entstehung der Hopf–Bifurkation	34
5	Das δ–geklickte System	41
5.1	Determinante und Spur des Zeitentwicklungsoperators	41
5.1.1	Determinante	42
5.1.2	Spur	42
5.2	Hopf–Instabilität	43
5.3	Bifurkationslinien für verschwindende Dämpfung	44
5.4	Das Bifurkationsdiagramm für verschwindende Dämpfung	47
5.4.1	Periodizitäten	49
5.5	Das Bifurkationsdiagramm bei endlicher Dämpfung	51
5.6	Störungsentwicklung um Kreuzungs– punkte	54
5.6.1	Lineare Näherung um einen Kreuzungspunkt im dämp– fungslosen Fall	54
5.6.2	Bedingungsgleichungen für Soft–mode–Instabilität in Hyperbelnäherung	58
6	Das Verhalten oberhalb der Schwelle	63
6.1	Amplitudengleichungsformalismus	64
6.2	Berechnung der Koeffizienten der linearen Terme	69
6.2.1	Die Schwelle	69
6.2.2	Ableitungsrelationen	69
6.2.3	Konvektiver Koeffizient v	71

6.2.4	Linearer Koeffizient η	71
6.2.5	Diffusiver Koeffizient D	72
6.3	Der nichtlineare Koeffizient r	73
6.3.1	Zur Berechnung der explizit zeitabhängigen Eigenvektoren	74
6.3.2	Berechnung der Eigenvektoren	80
6.3.3	Bestimmung von r	82
6.3.4	Übergang zum δ -gekickten Fall	84
6.4	Koeffizienten am Entartungspunkt der Hopf-Bifurkationslinie	87
6.4.1	Entwicklung der Koeffizienten für kleine Dämpfungen	89
7	Die starke Resonanz	91
7.1	Quartische Hopf-Instabilität	92
7.1.1	Bifurkationsbedingung	93
7.1.2	Amplitudengleichung	94
7.1.3	Berechnung des nichtlinearen Koeffizienten s	95
7.2	Koeffizienten am Entartungspunkt der Hopf-Bifurkationslinie	96
7.2.1	Entwicklungen nach kleinen Dämpfungen	98
8	Zusammenfassung	101
A	Stereographische Projektion	103
B	Pauli-Spinmatrizen	104
C	Entwicklung um den Berührungspunkt	106
D	Entwicklung des linearen Operators	107
E	Orthogonalität und Normierung der Eigenvektoren $u_c^{(\nu)}(t)$ und $v_c^{(\nu)}(t)$	109

F	Die Produkte K_2 bis K_{-4}	111
G	Die Produkte L_0 bis L_{-4}	112
	Literaturverzeichnis	113

Kapitel 1

Einleitung

In der Natur finden wir eine Vielzahl von selbst organisierten Strukturen. Dazu zählen zum Beispiel die Muster auf Tieren und auch auf Pflanzen oder Sandwellen am Strand. All diese komplexen Systeme bilden Muster, deren Erforschung wegen der Kompliziertheit des zugrunde liegenden Systems nicht einfach ist. Physikerinnen und Physiker untersuchen schon seit langem Modellsysteme, die ebenso faszinierend sein können, aber doch einfacher zu handhaben sind.

Es war in der Tat der Zusammenhang zwischen der Anzahl von Blättern in Blütenkelchen mit der Fibonacci-Sequenz, die Alan Turing Anfang der 50er-Jahre veranlasste, nach einer theoretisch-mathematischen Ursache für diese Form von biologischer Nichtgleichgewichtsstrukturbildung zu suchen. Wesentliches Ergebnis dieser Überlegungen war, dass Substanzen mit unterschiedlichen Diffusivitäten zu spontaner Musterbildung neigen. Dieser Typ von Turing-Instabilität bildet einen grundlegenden Mechanismus der Musterbildung und Differenzierung in biologischen Systemen.

In dissipativen dynamischen Systemen können sich Nichtgleichgewichtsstrukturen nur unter ständiger Energiezufuhr ausbilden. Solange die treibenden Felder klein sind, bleibt der ursprüngliche Gleichgewichtszustand stabil und die Dynamik lässt sich im Rahmen einer Reihenentwicklung durch Antworttheorien beschreiben. Diese Konzepte sind gerade im Zusammenhang mit spektroskopischen Analysen von großer Bedeutung in der makroskopischen und mesoskopischen Physik (z.B. [Kubo], [Fors]). Wenn die Energiezufuhr, d.h. in der Regel die treibende Feldstärke, einen kritischen Schwellwert überschreitet, tritt eine unter Umständen sogar unstetige Zustandsänderung auf, ein Verhalten, das durchaus Ähnlichkeiten mit Gleichgewichtsphasenübergängen aufweisen kann.

Das im Rahmen physikalischer Systeme klassische Beispiel einer solchen scheinbar spontanen Musterbildung ist das Rayleigh–Bénard–Experiment. Hierbei wird eine dünne Flüssigkeitsschicht von unten erhitzt. Bei kleinen Temperaturunterschieden zwischen Ober- und Unterseite der Schicht wird die Energie durch Wärmeleitung transportiert. Erhöhen wir die Temperaturdifferenz, so setzt ab einem bestimmten Wert spontan Konvektion ein. Es entstehen dann Konvektionszellen, die z.B. geordnete Strukturen in Form von Rollen oder Hexagonen bilden können. Bei einer weiteren Erhöhung des Temperaturgradienten sehen wir ein turbulentes Strömungsfeld, und die geordneten Strukturen lösen sich auf.

Das zur Behandlung eines solchen Phänomens notwendige Werkzeug wurde Ende der 60er-Jahre von Newell und Whitehead [NeWh] entwickelt. Die Strukturen, die sich jenseits der (primären) Instabilität ausbilden, lassen sich auf universelle Weise, unabhängig vom zu Grunde liegenden System, beschreiben. Jenseits der Instabilitätsschwelle treten Modulationsmuster auf, die auf großen Orts- und langsamen Zeitskalen variieren. Die Ursache dieser Modulationsphänomene liegt darin, dass in räumlich ausgedehnten Systemen knapp oberhalb der Instabilitätsschwelle nicht nur eine instabile Mode, sondern ein schmales Band instabiler Moden auftritt, deren Wellenzahlen nur wenig von der kritischen abweichen. Damit lässt sich die gesamte Dynamik des Systems auf die Bewegungsgleichung für die Einhüllende des Musters, d.h. auf eine Amplitudengleichung reduzieren. Durch eine solche Bewegungsgleichung ist die Beschreibung auf die dynamisch relevanten Freiheitsgrade reduziert. Die konkrete Form dieser Bewegungsgleichung wird im wesentlichen durch den Typ der vorliegenden Instabilität und durch Symmetrien des Systems bestimmt. Auch in dieser Hinsicht weisen Nichtgleichgewichtsstruktur- und Gleichgewichtsphasenübergänge strukturelle Ähnlichkeiten auf.

Für die formale Herleitung der effektiven Bewegungsgleichung verwendet man Störungsentwicklungen, in denen die unterschiedlichen Längen- und Zeitskalen getrennt werden. Damit erreicht man eine Elimination der schnellen irrelevanten Bewegungsvariablen. Durch Vermeidung von linear in der Zeit anwachsenden Termen, die auch Säkularterme genannt werden, ergibt sich eine Amplitudengleichung zur Beschreibung der raumzeitlichen Dynamik oberhalb der Instabilitätsschwelle. Diese Gleichungen sind von der Struktur her universell, das zugrunde liegende physikalische System findet seinen Niederschlag in den Zahlenwerten der Koeffizienten. Das beschriebene Reduktions- und Analyseverfahren findet mit Erfolg nicht nur für hydrodynamische Systeme, sondern in vielfältigen Zweigen der Physik Anwendung [CrHo]. Exemplarisch sei hier die klassische Arbeit von Kuramoto und Tsuzuki [KuTs] zur Ableitung der komplexen Ginzburg–Landau–Gleichung für ein zweikompo-

nentiges Reaktions–Diffusionssystem genannt.

Als einen zentralen Punkt dieser Arbeit wollen wir die Auswirkungen von starken Resonanzen auf die Form der sich ergebenden Amplitudengleichung diskutieren. Resonanzen treten in linearen Systemen auf, wenn die Frequenz des Antriebs mit der internen Oszillationsfrequenz übereinstimmt. In nichtlinearen Systemen können darüber hinaus Resonanzen auftreten, wenn beide Frequenzen, d.h. die interne und die des Antriebs, in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Während in Hamiltonschen Systemen generischerweise jedes rationale Frequenzverhältnis zu Resonanzen führt [LiLi], sind die meisten dieser Resonanzen in dissipativen Systemen unterdrückt. Ein besonders interessanter Fall liegt vor, wenn oszillatorische Instabilitäten, d.h. Hopf–Bifurkationen, in Anwesenheit periodisch treibender Felder untersucht werden. Qualitativ neue Phänomene ergeben sich, wenn das Frequenzverhältnis zwischen Antrieb und interner Frequenz die Werte zwei, drei oder vier annimmt [ArnV]. In diesen Fällen, die als starke Resonanzen bezeichnet werden, wird die Eichinvarianz der sich ergebenden Normalform, d.h. in räumlich ausgedehnten Systemen die Eichinvarianz der Amplitudengleichung, gebrochen. Resonanzen höherer Ordnungen spielen keine Rolle, da sie durch die Dissipation unterdrückt werden. Die zugehörige effektive Beschreibung im Rahmen einer Amplitudengleichung, die das Verhalten oberhalb einer starken Resonanz beschreibt, ist nun nicht mehr eichinvariant [ArKr], [CrHo]. Aus der Literatur ist bekannt, dass Amplitudengleichungen mit linearen, nicht eichinvarianten Beiträgen in der Umgebung von parametrischen Resonanzen der Ordnung zwei mit endlichen kritischen Wellenzahlen auftreten (s. z.B. [Miln], [ArKr], [CoEm], [CLHL], [FrGi]). Dahingegen können in Amplitudengleichungen nichtlineare, nicht eichinvariante Terme im Zusammenhang mit Hopf–Bifurkationen vorkommen. Leider finden sich in der Literatur kaum systematische Herleitungen, da die Koeffizienten der Amplitudengleichung häufig basierend auf phänomenologischen Betrachtungen bestimmt werden.

Wir wollen uns im Rahmen dieser Arbeit einer systematischen und vollständig analytischen Herleitung einer Amplitudengleichung zuwenden, insbesondere unter Berücksichtigung starker Resonanzphänomene. Als physikalisches Ausgangssystem betrachten wir ein magnetisches Modellsystem. Magnetische Systeme sind einerseits ein klassisches Beispiel für Gleichgewichtsstrukturbildung, die wesentlich auch durch die langreichweitige schwache Dipol–Dipol–Wechselwirkung hervorgerufen wird. Neben dieser schwachen, langreichweitigen Wechselwirkung weisen Magnete über den Austausch eine starke, kurzreichweitige Wechselwirkung auf, die diese Systeme in eine gewisse Analogie zu chemischen Reaktions–Diffusionssystemen setzt. Von entscheidender Bedeutung ist allerdings, dass magnetische Systeme wegen der Ankopplung

magnetischer Felder an die inneren Freiheitsgrade, im einfachsten Fall an die Magnetisierungsdichte, eine intrinsische Nichtlinearität aufweisen. Damit spielen sie andererseits eine herausgehobene Rolle aus Sicht der Nichtlinearen Dynamik.

Schon in den 50er-Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde nachgewiesen, dass magnetische Systeme eine dynamische Instabilität aufweisen. Legt man an eine durch ein starkes, externes Feld homogen magnetisierte Probe ein schwaches Wechselfeld an, so bricht die homogene Magnetisierung bei Erreichen eines kritischen Wertes des treibenden Feldes zusammen. Dieser als Suhl'sche Instabilität bekannte Mechanismus beruht im wesentlichen auf einer parametrischen Anregung von Spinwellen [Suhl]. Obwohl in der Folgezeit auch das Verhalten oberhalb dieser Schwelle untersucht wurde [Naka], [Lvov], sind bis zum heutigen Tage keine, die experimentellen Befunde vollständig erklärenden theoretischen Ansätze entwickelt worden [Wige], [Benn]. Gerade deswegen sind magnetische Systeme als ein Testfall für das detaillierte Verständnis von Nichtgleichgewichtsstrukturbildung vorgeschlagen worden [CrHo].

In mehreren Vorläuferarbeiten wurde das Konzept der Amplitudengleichungen erfolgreich zur Behandlung von Instabilitäten in getriebenen magnetischen Systemen eingesetzt. Durch geeignete Formalisierung des Eliminationsverfahrens konnten Matthäus und Sauermann [MaSa] die Instabilitäten höherer Kodimension untersuchen, die durch das Aufeinandertreffen einer Soft-mode- mit einer Hard-mode-Bifurkationslinie gekennzeichnet ist. Als weitere Beispiele solcher Instabilitäten höherer Kodimension sei der in [JMS] untersuchte Fall einer entarteten Soft-mode-Instabilität erwähnt, die den Übergang von sub- zu superkritischem Verhalten beschreibt. Schließlich diskutiert Kugler [Kugl] das Aufeinandertreffen einer Soft-mode- und einer Sattel-Knoten-Bifurkation und Riegert [Rieg] den Einfluss der Dipolwechselwirkung in getriebenen ferromagnetischen Filmen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Strukturbildung in einem Modell, das einen dissipativen, parallel getriebenen Ferromagneten beschreibt. Im Rahmen einer mesoskopischen Beschreibung werden die dynamischen Freiheitsgrade durch die Magnetisierungsdichte erfasst. Die Dynamik der Magnetisierungsdichte lässt sich anhand der Landau-Lifschitz-Gleichung beschreiben, die in Kapitel 2 mit allen Termen des effektiven Magnetfelds vorgestellt wird. Da wir uns der Einfachheit halber auf eine räumlich eindimensionale Beschreibungsweise beschränken, übernimmt die Anisotropie senkrecht zum statischen Feld die Rolle der langreichweitigen Dipol-Dipol-Wechselwirkung.

Im Rahmen unserer Behandlung steht in einem ersten Schritt in Kapitel 3 die Analyse der primären Instabilität im Mittelpunkt. Bei Erreichen der kritischen Feldstärke wird die stationäre Lösung gegenüber homogenen Störungen linear instabil. Zur vollständig analytischen Diskussion der Instabilitätsschwellen betrachten wir dabei das Spektrum des zugehörigen Zeitentwicklungsoperators in Abhängigkeit von den Wellenzahlen der Störung. Aufgrund der Lage dieser Eigenwerte in der komplexen Ebene können wir Aussagen über die Stabilität der stationären Lösung treffen.

Zur Untersuchung von Musterbildungsprozessen unter Anwesenheit starker Resonanzen ist es wichtig, im zu bestimmenden Bifurkationsszenario einen großen Bereich einer Hopf-Instabilität zu sichern. Wir werden dies durch eine geeignete Wahl des treibenden Feldes gewährleisten. In Kapitel 4 sehen wir, dass diese Situation am besten dadurch realisiert wird, wenn das treibende Feld aus einer periodischen Abfolge von δ -Kicks besteht.

In Kapitel 5 wird anhand der Eigenwerte des Zeitentwicklungsoperators das komplizierte Bifurkationsszenario auf komplett analytischer Basis diskutiert. Wir werden dabei den Einfluss kleiner Dämpfungen auf die Ausbildung der Bifurkationslinien störungstheoretisch behandeln. Letztere beschreiben die Instabilitätsgebiete im parametrisch angeregten System. Darüberhinaus weisen wir explizit nach, dass in dem Bifurkationsszenario eine Soft-mode-Instabilität, d.h. eine Instabilität gegenüber wellenartigen Störungen mit endlichen kritischen Wellenzahlen, vorliegt. Diese Untersuchung des Bifurkationsschemas, welches von vielen Parametern abhängt, bildet die Grundlage zum Studium des Verhaltens des Systems oberhalb der Instabilitätsschwelle.

In Kapitel 6 wenden wir uns der Bestimmung der Amplitudengleichung bei Abwesenheit von starken Resonanzen zu. Wir bestimmen alle auftretenden Koeffizienten anhand des Verfahrens aus [Jual]. Durch Entwicklung der Koeffizienten nach kleinen Dämpfungen bestimmen wir die führenden Anteile der Koeffizienten. Dabei erhält man im Grenzfall verschwindender Dämpfung eine nichtlineare Schrödingergleichung.

In Kapitel 7 untersuchen wir die starken Resonanzen in unserem Modell. Den Fall der starken Resonanz zweiter Ordnung betrachten wir nicht. In diesem Fall wird ein Lösungsansatz, bestehend aus zwei Amplitudengleichungen, benötigt, der zu einem System gekoppelter, nicht eichinvarianter Amplitudengleichungen führt, wie in [CrHo], [DoFa] ausgeführt. Für den Fall der starken Resonanz dritter Ordnung liefert das von uns verwendete formale Lösungsverfahren aus [Jual] kein konsistentes Resultat.

Wir beschränken uns daher auf den Fall der starken Resonanz vierter Ordnung. Wir werden dabei das in [Jual] skizzierte allgemeine Verfahren auf un-

ser System anwenden, und die nicht eichinvariante Amplitudengleichung mit expliziten Ausdrücken für die Koeffizienten erhalten. Eine abschließende Entwicklung der Koeffizienten nach kleinen Dämpfungen führt hierbei im Grenzfalle verschwindender Dämpfung auf eine modifizierte nichtlineare Schrödingergleichung. Das Lösungsverhalten dieser neuartigen Gleichung wird sich grundlegend von Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung, die durch Solitonen beschrieben werden können, unterscheiden. Bisher ist diese Form einer nicht eichinvarianten Amplitudengleichung in der Literatur nicht untersucht worden.

Wir schließen die gesamte Darstellung mit einer kurzen Ergebniszusammenfassung in Kapitel 8 ab.

Kapitel 2

Das Modellsystem

2.1 Die Bewegungsgleichung

Bei der Betrachtung von Strukturbildungsprozessen in ferromagnetischen Systemen spielen große Längenskalen die entscheidende Rolle. Die relevante Größe ist daher nicht der einzelne Elektronenspin, sondern die lokale Magnetisierungsdichte $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Die Bewegungsgleichung wurde phänomenologisch bereits 1935 durch [LaLi] eingeführt in der Form

$$-\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \Gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) \quad . \quad (2.1)$$

Der erste Term beschreibt eine Präzession der Magnetisierungsdichte um das lokale effektive Feld. Der zweite Term gibt eine Dissipation in Form einer Relaxation in Richtung des effektiven Feldes an. In Gleichung (2.1) ist die dimensionslose Form gewählt, bei der die Sättigungsmagnetisierung ($|\mathbf{M}_0|$) und der gyromagnetische Faktor herauskaliert wurden.

In neueren Arbeiten [Gara], [Plef] wurde die Landau–Lifschitz–Gleichung aus der zugrundeliegenden Dynamik der Elektronenspins abgeleitet. Die Gleichung ist im Bereich tiefer Temperaturen, d.h. unterhalb der Curie–Temperatur, für typische Ferromagneten gültig, da dort der Beitrag der Bloch–Dämpfung, der den Betrag der Magnetisierung reduziert, gegenüber der Landau–Lifschitz–Dämpfung vernachlässigt werden darf.

Der Betrag der lokalen Magnetisierungsdichte ist eine Erhaltungsgröße und ist in der Bewegungsgleichung (2.1) auf eins skaliert. Die Dynamik von \mathbf{M} findet deshalb auf der Oberfläche der Einheitskugel im Spinraum statt. Im folgenden beschränken wir uns auf die Diskussion räumlich eindimensionaler Systeme, d.h. $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, t)$.

2.2 Das effektive Feld

Entscheidend für die Dynamik des Systems ist die Form des effektiven Magnetfeldes \mathbf{H}_{eff} , welches aus inneren und äußeren Feldern besteht:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = (H + h(t)) \mathbf{e}_z + J \Delta \mathbf{M} + a M_z \mathbf{e}_z + b M_x \mathbf{e}_x \quad (2.2)$$

- **Innere Felder**

- **Isotropes Austauschfeld:** Das isotrope Austauschfeld der Stärke $J \Delta \mathbf{M}$ wird durch die elektrostatische Coulomb–Wechselwirkung der Elektronen erzeugt. Betrachtet man im Kontinuumslimit die Nächste–Nachbar–Wechselwirkung, so ergibt sich die räumliche zweite Ableitung [Akhi]. Für Ferromagneten gilt $J > 0$.
- **Biaxiale Anisotropie:** Diese Wechselwirkung resultiert aus der Wechselwirkung der magnetischen Momente mit dem elektrischen Feld des Kristallgitters [Akhi]. Sie besitzt hier die Stärke a in z –Richtung und die Stärke b in x –Richtung. Die Anisotropie in x –Richtung bricht die Rotationssymmetrie des restlichen effektiven Feldes.

Für räumlich homogene Magnetisierungen kann die Kristallfeldanisotropie nicht von dem Entmagnetisierungsterm des Dipolarfeldes unterschieden werden. Man stellt durch Lösen der magnetostatischen Grundgleichungen fest, dass das Dipolarfeld proportional zu M_x ist. Der komplette Einfluss des Dipolarfeldes auf die Instabilitäten in räumlich ausgedehnten Systemen unter parallel pump wurde in [Rieg] untersucht.

- **Äußere Felder**

- **Statisches Magnetfeld:** Das statische Magnetfeld besitzt die Stärke H und ist in z –Richtung angelegt. Dieses Feld gibt die Richtung für den homogenen Magnetisierungszustand vor. Wir setzen voraus, dass dieser Zustand ohne treibendes Feld stabil ist, d.h. H ist so groß zu wählen, dass keine Domänen im System auftreten.
- **Treibendes Feld:** Das treibende Feld $h(t)$ zeigt in dieselbe Richtung wie das statische Feld H (parallel pump). Weiterhin wird die Forderung gestellt, dass es periodisch in der Zeit sein soll, d.h. es gilt

$$h(t) = h(t + T) \quad . \quad (2.3)$$

Im Gegensatz zu Spezialfällen des transversalen Pumpens kann hier die explizite Zeitabhängigkeit nicht durch Übergang in ein rotierendes Bezugssystem eliminiert werden, wie es z.B. in [KMay] oder [Völg] hilfreich war.

Um unser explizit zeitabhängiges System einer analytischen Behandlung zugänglich zu machen, wird es in der gesamten Arbeit zu einem stückweise konstant treibenden Feld vereinfacht:

$$h(t) = \begin{cases} -h & \text{für } 0 < t \leq t_1 \\ 0 & \text{für } t_1 < t \leq T \end{cases} \quad (2.4)$$

Ein solches Feld besitzt folgende graphische Darstellung:

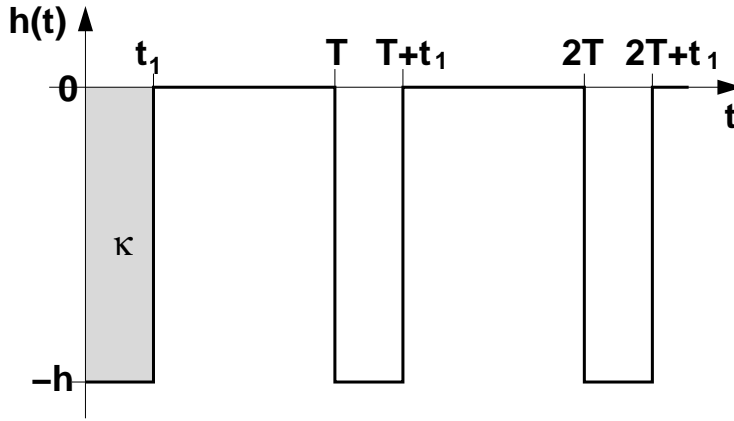


Abbildung 2.1: Zeitlicher Verlauf des treibenden Feldes $h(t)$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Produkt aus Feldstärke h und Zeitdauer t_1 , d.h. die Größe $\kappa := h t_1$, eine wichtige Rolle spielen. Die Größe κ ist in Abb. 2.1 durch die grau schraffierte Fläche dargestellt.

2.3 Stereographische Projektion

Wegen der Erhaltung des Magnetisierungsbetrages ist eine der Komponenten der Magnetisierung redundant. In der traditionellen Literatur, insbesondere bei der Behandlung linearer Probleme, wird diesem Umstand dadurch Rechnung getragen, dass man eine der Komponenten vermöge einer Reihenentwicklung von $m_z = \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}$ durch die Transversalkomponenten ausdrückt. Im vorliegenden Fall, der sich insbesondere mit einer systematischen Analyse nichtlinearer Effekte beschäftigen wird, ist eine kompaktere und systematischere Vorgehensweise angebracht.

Zu diesem Zweck machen wir von einer stereographischen Projektion der Oberfläche der Einheitskugel auf die komplexe Zahlenebene Gebrauch (siehe Anhang A). Unter Ausnutzung der Erhaltung des Betrages der Magnetisierung, d.h. $|\mathbf{M}|^2 = 1$, wird Gl. (2.1) auf eine komplexwertige, zweikomponentige Gleichung transformiert. Unter der Vorschrift

$$\phi = \frac{M_x + i M_y}{1 + M_z} \quad (2.5)$$

wird Gl. (2.1) mit Gl. (2.2) zu

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & (i - \Gamma) \left[(H + h(t)) \phi + J \left(2 \frac{\phi^* (\partial_x \phi)^2}{1 + |\phi|^2} - \partial_{xx} \phi \right) \right. \\ & \left. + a \phi \frac{1 - |\phi|^2}{1 + |\phi|^2} - b (1 - \phi^2) \frac{\text{Re} \phi}{1 + |\phi|^2} \right] . \end{aligned} \quad (2.6)$$

In der vorliegenden Form (2.6) ist die Erhaltungsgröße eliminiert und die Dynamik auf das zweikomponentige Feld ϕ reduziert. Wegen der Form des effektiven Feldes aus Gl. (2.2) besitzt die Nichtlinearität in Gl. (2.6) nur ungerade Potenzen in ϕ .

Kapitel 3

Lineare Stabilitätsanalyse

In diesem Kapitel werden wir die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$ auf deren lineare Stabilität hin untersuchen. Auf Grund der Orientierung und der zeitlichen Periodizität des treibenden Feldes liegt ein Floquet-Problem vor. Dieses entzieht sich im Allgemeinen einer vollständigen analytischen Behandlung. Durch unsere Wahl des stückweise konstant treibenden Feldes, wie wir sie in Gl. (2.4) vorgenommen haben, können wir aber diese Fragestellung vollständig auf analytischem Wege behandeln.

3.1 Stationäre Lösung und Linearisierung

Wir erhalten aus Gl. (2.6) die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$. Übertragen wir dieses Ergebnis in das Modell der Magnetisierungsdichte, so entspricht die stationäre Lösung einer ferromagnetischen Domäne mit $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z$. Wir werden die Untersuchung der Stabilität dieser stationären Lösung nicht mit Hilfe der Magnetisierungsdichte vornehmen, sondern diese Untersuchung in stereographischer Projektion durchführen.

Die Linearisierung um die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$ liefert aus Gl. (2.6):

$$\partial_t \phi = (i - \Gamma) [(H + a + h(t)) \phi - b \operatorname{Re} \phi - J \partial_{xx} \phi] \quad (3.1)$$

Weiterhin wird die stationäre Lösung ϕ_0 wellenartigen Störungen mit der Störwellenzahl k ausgesetzt. Für die dann notwendige Stabilitätsanalyse wird in der linearisierten Gleichung (3.1) die zweite Ableitung im Ort ∂_{xx} durch den Term $-k^2$ ersetzt.

Da Gl. (3.1) eine komplexwertige Gleichung ist, wird zur weiteren Betrachtung die Größe ϕ in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\phi(t, k) = \phi_R(t, k) + i \phi_I(t, k) \quad (3.2)$$

Dann erhalten wir aus (3.1) die reellwertige Gleichung

$$\dot{\Phi}(t, k) = \underline{\underline{L}}(t, k) \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_I \end{pmatrix} . \quad (3.3)$$

Der lineare Operator $\underline{\underline{L}}$ vereinfacht sich wegen des stückweise konstant treibenden Feldes aus Gl. (2.4) zu

$$\underline{\underline{L}}(t, k) = \begin{cases} \underline{\underline{L}}_0(k) + \underline{\underline{L}}_1 & \text{für } 0 < t \leq t_1 \\ \underline{\underline{L}}_0(k) & \text{für } t_1 < t \leq T \end{cases} \quad (3.4a)$$

mit

$$\underline{\underline{L}}_0(k) := \begin{pmatrix} -\Gamma(\alpha_k - b) & -\alpha_k \\ \alpha_k - b & -\Gamma\alpha_k \end{pmatrix} \quad (3.4b)$$

und

$$\underline{\underline{L}}_1 := h \begin{pmatrix} \Gamma & 1 \\ -1 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (3.4c)$$

mit der Abkürzung $\alpha_k := H + a + Jk^2$. Aufgrund der geforderten Positivität von H , a und J gilt für die Abkürzung $\alpha_k > 0$.

Weiterhin ist zu beachten, dass alle Parameter von der gleichen Größenordnung sind. Es werden zur Stabilitätsanalyse keine störungstheoretischen Methoden verwendet, die kleine Felder oder kleine Dämpfungen voraussetzen. Wir werden im Folgenden zunächst die Stabilität der stationären Lösung im ungetriebenen Fall untersuchen.

3.1.1 Die Stabilität der stationären Lösung im ungetriebenen Fall

In diesem Abschnitt werden wir die Stabilität der stationären Lösung im ungetriebenen Fall gegen alle Störungen der Störwellenzahl k untersuchen. Da in diesem Spezialfall keine explizite Zeitabhängigkeit mehr vorliegt, können wir die Stabilitätsanalyse mit Hilfe der wohlbekannten Methoden der Nichtlinearen Dynamik durchführen. Ausschlaggebend hierfür sind die Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte λ_i des linearen Operators $\underline{\underline{L}}_0$ aus Gl. (3.4b). Um sicherzustellen, dass die stationäre Lösung ϕ_0 im ungetriebenen Fall stabil bleibt, müssen die beiden Eigenwerte λ_i negativen Realteil besitzen.

Die zugehörigen Bedingungen erhalten wir aus der charakteristischen Gleichung. Wir werden sie hier für die Spur und für die Determinante des linearen Operators angeben. Damit beide Realteile negativ sind, müssen wir folgendes fordern:

- Die Determinante von $\underline{\underline{L}}_0$ muss positiv sein, d.h. es gilt:

$$\det \underline{\underline{L}}_0 > 0 \quad \implies \quad (\alpha_k - b) \alpha_k > 0 \quad \iff \quad \alpha_k - b > 0 \quad (3.5a)$$

Diese Bedingung an die Stabilität der stationären Lösung wird im ganzen weiteren Verlauf der Arbeit eine entscheidende Rolle spielen.

- Die Spur von $\underline{\underline{L}}_0$ muss negativ sein, d.h. es gilt:

$$\text{Sp} \underline{\underline{L}}_0 < 0 \quad \implies \quad \alpha_k - \frac{b}{2} > 0 \quad (3.5b)$$

Die Bedingung aus Gl. (3.5b) ist stets erfüllt, wenn Gl. (3.5a) gilt.

3.2 Phasenportraits

Wir werden in diesem Abschnitt numerische Lösungen der linearisierten Gleichung (3.3) unter verschiedenen Bedingungen betrachten.

3.2.1 Lösung ohne treibendes Feld

Wir werden in diesem Unterabschnitt die Relevanz der wichtigen Stabilitätsbedingung aus Gl. (3.5a) anhand von Darstellungen des zeitlichen Verlaufs der linearisierten Gleichung zeigen. Wir werden im konkreten Fall einzig den wichtigen Parameter b variieren, während wir den anderen Parametern feste Werte zuweisen, nämlich $\alpha_k = 3$, $T = 1$ und $\Gamma = 0.1$. In den Abbildungen 3.1 — 3.5 sind die Startpunkte der Iteration durch einen Punkt hervorgehoben, und der zeitliche Verlauf wurde durch einen Pfeil markiert.

Knapp unterhalb der Instabilitätsschwelle, die durch Gl. (3.5a) gegeben ist, verhält sich die Lösung der linearisierten Gleichung wie in Abb. 3.1 dargestellt. Wir sehen, dass im zeitlichen Verlauf die Lösung des linearisierten Problems die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$ erreicht.

Nähern wir uns der Instabilitätsschwelle aus Gl. (3.5a), so läuft die Lösung der linearisierten Gleichung langsam, aber stetig in die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$, wie aus Abb. 3.2 ersichtlich wird.

Überschreiten wir hingegen knapp die Instabilitätsschwelle, die in Gl.(3.5a) festgelegt wurde, so sehen wir in Abb. 3.3, dass das System nicht mehr der Lösung $\phi_0 = 0$ entgegen strebt. Die uns interessierende Lösung ist somit instabil geworden. Die genaue Untersuchung dieser Instabilität im ungetriebe-

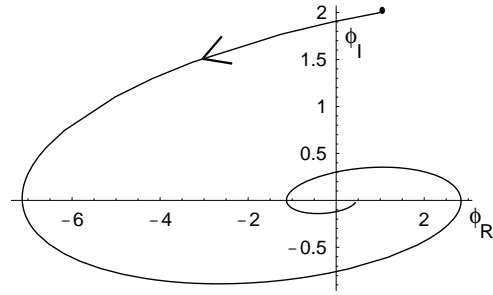


Abbildung 3.1: Zeitlicher Verlauf von $\Phi(t)$ für $b = 2.9$

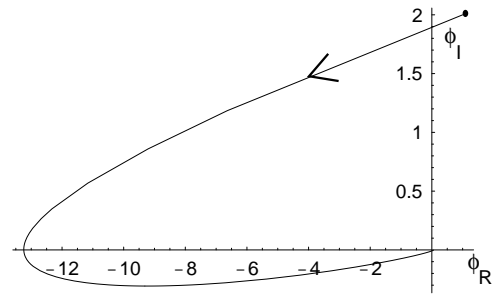


Abbildung 3.2: Zeitlicher Verlauf von $\Phi(t)$ für $b = 2.99$

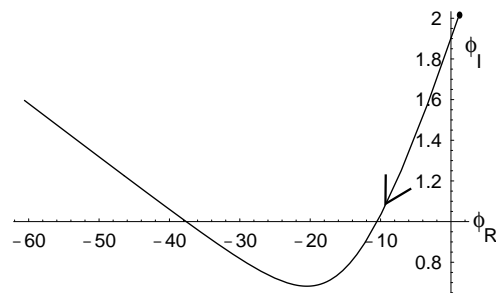


Abbildung 3.3: Zeitlicher Verlauf von $\Phi(t)$ für $b = 3.01$

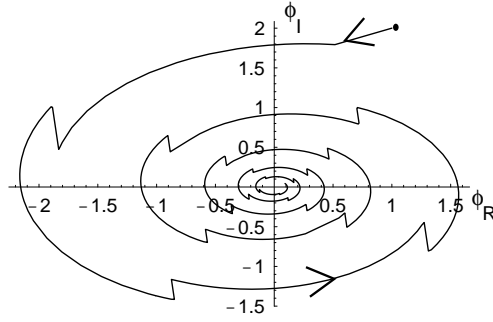


Abbildung 3.4: Zeitlicher Verlauf von $\Phi(t)$ für $T = 1$, $\alpha_k = 3$, $b = 1$, $t_1 = 0.3$, $h = 3$, $\Gamma = 0.1$

nen System wird im Verlaufe dieser Arbeit nicht von Interesse sein, deswegen belassen wir es bei diesen qualitativen Untersuchungen. Wir werden uns hingegen im weiteren Verlauf der Arbeit dem Einfluss des treibenden Feldes auf die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$ widmen.

3.2.2 Lösung mit treibendem Feld

Wir werden jetzt den Einfluss des treibenden Feldes untersuchen. Dabei werden wir alle Parameter im folgenden so wählen, dass das System im ungetriebenen Fall eine stabile, triviale Lösung besitzt. Davon ausgehend werden wir in einem weiteren Schritt die Amplitude h des treibenden Feldes erhöhen. Durch zahlreiche Untersuchungen haben sich zwei Szenarien ergeben, die wir exemplarisch hier vorstellen werden.

Im ersten Fall starten wir von einer stabilen Lösung und schalten das treibende Feld hinzu. Wir sehen in dem dann entstehenden Phasenportrait in Abb. 3.4, dass die Lösung bei kleinen treibenden Feldern stabil bleibt.

In Abb. 3.4 sehen wir, dass das stückweise stetige treibende Feld einen zackenförmigen Verlauf im Phasenportrait hervorruft. Die Sprünge werden durch den Wechsel des treibenden Feldes an den Intervallgrenzen hervorgerufen. Bei der entsprechenden Wahl der Parameter in Abb. 3.4 haben wir den Wert $\kappa = 1$ repräsentiert. Eine andere Aufteilung in der Größe $\kappa = 1$ durch die beteiligten Größen t_1 und h ändert nichts am qualitativen Verlauf aus Abb. 3.4.

Wir weisen daher dem Zeitintervall t_1 einen festen Wert zu und werden eine Erhöhung der Amplitude h des treibenden Feldes betrachten. Wir sehen dabei in Abb. 3.5, dass ab einem bestimmten Wert von h , der einem bestimmten Wert von κ entspricht, im Phasenportrait eine Spiralbewegung der

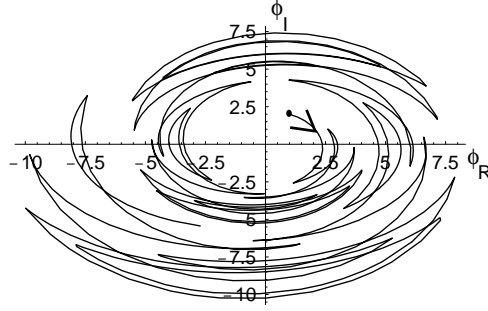


Abbildung 3.5: Zeitlicher Verlauf von $\Phi(t)$ für $T = 1$, $\alpha_k = 3$, $b = 1$, $t_1 = 0.3$, $h = 10$, $\Gamma = 0.1$

Lösung nach außen ersichtlich wird. In Abb. 3.5 haben wir den Startpunkt der Iteration wieder mit einem Punkt kenntlich gemacht.

Da wir in unserer Arbeit speziell an dem Stabilitätsverhalten der stationären Lösung $\phi_0 = 0$ interessiert sind, haben wir das lineare System speziell in dieser Hinsicht untersucht. Insbesondere die Instabilität der stationären Lösung bei Veränderung der Stärke des treibenden Feldes sowie die Mechanismen, die dazu führen, werden mit Hilfe der anstehenden analytischen Behandlung untersucht werden.

3.3 Floquet–Problem

Das zu betrachtende System aus Gl. (3.1), welches die numerischen Szenarien des vorangegangenen Abschnitts enthält, ist explizit zeitabhängig. Wir werden die Instabilitäten der stationären Lösung nicht mit der explizit zeitabhängigen Gleichung bestimmen, sondern mit Hilfe einer entsprechenden Gleichung für den Zeitentwicklungsoperator. Mit der Transformation $\Phi(t, k) = \underline{\underline{U}}(t, k) \Phi(0, k)$ erhalten wir aus Gl. (3.3) die Bewegungsgleichung für den Zeitentwicklungsoperator

$$\dot{\underline{\underline{U}}}(t, k) = \underline{\underline{L}}(t, k) \underline{\underline{U}}(t, k) \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{U}}(0, k) = \underline{\underline{1}} \quad . \quad (3.6)$$

Wir erhalten aus Gl. (3.6) nach Anwendung des Floquet–Theorems für explizit zeitabhängige Systeme für $\underline{\underline{U}}(t, k)$ die formale Lösung

$$\underline{\underline{U}}(t, k) = \underline{\underline{Q}}(t, k) \exp\{\underline{\underline{c}}(k) t\} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{Q}}(t + T, k) = \underline{\underline{Q}}(t, k) \quad (3.7)$$

Nach einer Periode des treibenden Feldes wird Gl. (3.7) zu

$$\underline{\underline{U}}(T, k) = \exp\{\underline{\underline{c}}(k) T\} \quad . \quad (3.8)$$

Diese Gleichung wird uns bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens behilflich sein. Im Allgemeinen wird das Stabilitätsverhalten der stationären Lösung durch die Eigenwerte $\mu_i(k)$ der Matrix $\underline{c}(k)$, die in Gl. (3.8) im Exponenten steht, bestimmt. Diese Eigenwerte werden in der Literatur Floquet-Exponenten genannt. Änderung im Stabilitätsverhalten treten beim Vorzeichenwechsel des Realteils des Floquet-Exponenten $\mu_i(k)$ auf. Falls für alle Wellenzahlen k gilt, dass $\operatorname{Re}\mu_i(k) < 0$ ist, so ist die stationäre Lösung stabil gegen wellenartige Störung mit allen Wellenzahlen. Gibt es hingegen eine Wellenzahl $k = q_c$, für die der Floquet-Exponent $\mu_i(q_c) > 0$ wird, so ist die stationäre Lösung instabil gegen wellenartige Störungen mit dieser Wellenzahl q_c .

Wir werden das Stabilitätsverhalten mittels der Eigenwerte $\Lambda_i(k)$ des Zeitentwicklungsoperators $\underline{U}(T, k)$ bestimmen, da wir diese für unser System einfacher bestimmen können. Diese Eigenwerte nennen wir im folgenden Floquet-Multiplikatoren. Entscheidend für die Stabilität der stationären Lösung sind nun nicht die Vorzeichen der Realteile der Floquet-Multiplikatoren $\Lambda_i(k)$, sondern deren Lage in der komplexen Ebene. Liegen die Floquet-Multiplikatoren $\Lambda_i(k)$ für alle Wellenzahlen k innerhalb des Einheitskreises, so ist die stationäre Lösung stabil gegen wellenartige Störungen. Die stationäre Lösung wird instabil gegen Störungen der Wellenzahl $k = q_c$, wenn ein oder mehrere Floquet-Multiplikatoren außerhalb des Einheitskreises liegen. Dieses Verfahren entspricht der Stabilitätsanalyse einer stationären Lösung einer Abbildung [GuHo].

3.3.1 Klassifikationen der Instabilitäten

Wegen der Zweidimensionalität des Systems (3.3) lassen sich die beiden Multiplikatoren $\Lambda_1(k)$ und $\Lambda_2(k)$ aus der Spur und der Determinante von $\underline{U}(T, k)$ eindeutig bestimmen:

$$\operatorname{Sp}\underline{U}(T, k) = \Lambda_1(k) + \Lambda_2(k) \quad \text{und} \quad \det\underline{U}(T, k) = \Lambda_1(k) \Lambda_2(k) \quad (3.9)$$

Diese Eigenschaft bietet den Vorteil, Instabilitäten ohne explizite Berechnung der Eigenwerte bestimmen zu können. Es werden nur Spur und Determinante des Evolutionsoperators zum Zeitpunkt T benötigt. Bevor wir uns mit der Berechnung dieser Größen beschäftigen, wenden wir uns einer Formulierung der zu betrachtenden Instabilitäten zu. Wir tun dies in gewohnter Weise, wobei wir die Spur und Determinante des Zeitentwicklungsoperators bei dieser Betrachtung berücksichtigen.

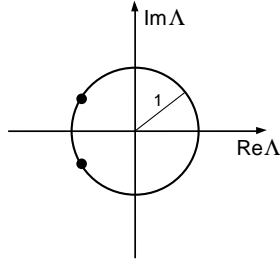


Abbildung 3.6: Lage der Floquet-Multiplikatoren für die Hopf-Bifurkation

Stabilität bei unkritischen Wellenzahlen

Wenn ein oder auch beide Floquet-Multiplikatoren den Einheitskreis berühren, so wird die stationäre Lösung marginal stabil. Die Wellenzahl k , bei der dieses Phänomen auftritt, wird als kritische Wellenzahl q_c bezeichnet. Wir können mit Hilfe von Gl. (3.9) die Bedingungen formulieren, dass die stationäre Lösung für alle anderen Wellenzahlen $k \neq q_c$ stabil bleibt, d.h. die Multiplikatoren Λ_i innerhalb des Einheitskreises liegen. Sie lauten:

$$|\det \underline{\underline{U}}(T, k \neq q_c)| < 1 \quad (3.10a)$$

$$|\text{Sp} \underline{\underline{U}}(T, k \neq q_c)| < 1 + \det \underline{\underline{U}}(T, k \neq q_c) \quad (3.10b)$$

Hopf-Bifurkation

Bei der **Hopf-Bifurkation** liegt für die kritische Wellenzahl $k = q_c$ ein Paar komplex konjugierter Multiplikatoren $\Lambda_2(k = q_c) = \Lambda_1^*(k = q_c)$ mit $\Lambda_i \in \mathbb{C}$ vor. Beide Multiplikatoren liegen auf dem Einheitskreis (s. Abb. 3.6), d.h. es gilt $|\Lambda_i(k = q_c)| = 1$.

Dann folgt aus Gl. (3.9) für die Determinante von $\underline{\underline{U}}(T, k)$

$$|\det \underline{\underline{U}}(T, k = q_c)| = 1 \quad (3.11a)$$

und für die Spur von $\underline{\underline{U}}(T, k)$

$$|\text{Sp} \underline{\underline{U}}(T, k = q_c)| < 2 \quad (3.11b)$$

Für alle anderen Wellenzahlen müssen die Bedingungsgleichungen (3.10a) und (3.10b) erfüllt sein, d. h. alle Floquet-Multiplikatoren für $k \neq q_c$ müssen im Einheitskreis liegen. Wenn $q_c \neq 0$ gilt, dann liegt eine Instabilität gegenüber laufenden Wellen vor.

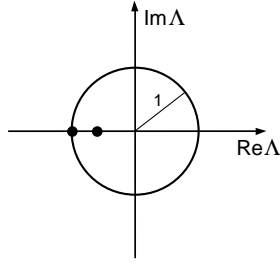


Abbildung 3.7: Lage der Floquet-Multiplikatoren für die Flip-Bifurkation

Instabilität für $\Lambda = -1$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass ein Multiplikator für die kritische Wellenzahl $k = q_c$ den Einheitskreis bei -1 schneidet, während der andere Multiplikator reell und vom Betrage kleiner als 1 ist (s. Abb. 3.7). Demzufolge gilt: $\Lambda_i(k = q_c) \in \mathbb{R}$, $\Lambda_1(k = q_c) = -1$, $|\Lambda_2(k = q_c)| < 1$. Bei dieser Instabilität handelt es sich um eine parametrische Instabilität aufgrund des periodisch treibenden Feldes. Sie ist mit einer Periodenverdopplung verknüpft.

Wir bezeichnen sie im weiteren Verlauf der Arbeit als **Flip-Bifurkation**, wie sie in der Literatur [GuHo] erwähnt ist. Wir erhalten folgende Bedingungsgleichung für die Instabilität an die Determinante von $\underline{\underline{U}}(T, k)$ aus Gl. (3.9):

$$\det \underline{\underline{U}}(T, q_c) = -\Lambda_2 \quad \Rightarrow \quad |\det \underline{\underline{U}}(T, q_c)| < 1 \quad (3.12a)$$

Für die Spur von $\underline{\underline{U}}(T, k)$ erhalten wir die Bedingung

$$\text{Sp} \underline{\underline{U}}(T, q_c) = -1 + \Lambda_2 = -1 - \det \underline{\underline{U}}(T, q_c) \quad . \quad (3.12b)$$

Für alle anderen Wellenzahlen müssen die Floquet-Multiplikatoren im Einheitskreis liegen, d. h. Gl. (3.10a) und Gl. (3.10b) müssen erfüllt sein. In der Literatur haben sich für die beiden Fälle verschwindender und nicht verschwindender Wellenzahl keine eigenständigen feststehenden Begriffe etabliert.

Instabilität für $\Lambda = 1$

Wenn ein Floquet-Multiplikator für eine kritische Wellenzahl $k = q_c$ den Einheitskreis bei $+1$ schneidet, der andere Multiplikator innerhalb des Einheitskreises liegt (s. Abb. 3.8), dann liegt eine weitere Instabilität vor. Beide Multiplikatoren sind reell und es gilt: $\Lambda_i(k = q_c) \in \mathbb{R}$, $\Lambda_1(k = q_c) = 1$ und $|\Lambda_2(k = q_c)| < 1$ mit $q_c \neq 0$.

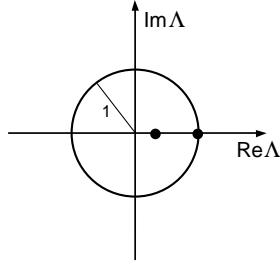


Abbildung 3.8: Lage der Floquet-Multiplikatoren für die Soft-mode-Bifurkation

Wegen des zeitlich periodisch treibenden Feldes handelt es sich bei dieser Instabilität ebenfalls um eine parametrische Instabilität [Arno]. Wir werden diese im weiteren Verlauf der Arbeit **Soft-mode-Bifurkation** nennen. Eine strenge Rechtfertigung für diese Bezeichnung wird in Kapitel 5 gegeben.

Wir erhalten aus Gl. (3.9) die Bedingungsgleichung für die Instabilität an die Determinante von $\underline{\underline{U}}(T, k)$

$$\det \underline{\underline{U}}(T, q_c) = \Lambda_2 \quad \Rightarrow \quad |\det \underline{\underline{U}}(T, q_c)| < 1 \quad . \quad (3.13a)$$

Die Bedingungsgleichung für die Instabilität an die Spur von $\underline{\underline{U}}(T, k)$ lautet:

$$\text{Sp} \underline{\underline{U}}(T, q_c) = 1 + \Lambda_2 = 1 + \det \underline{\underline{U}}(T, q_c) \quad (3.13b)$$

Für alle anderen Wellenzahlen müssen die Floquet-Multiplikatoren wiederum im Einheitskreis liegen, d. h. die Bedingungsgleichungen (3.10a) und (3.10b) müssen für $k \neq q_c$ erfüllt sein.

3.4 Determinante und Spur der Evolutionsmatrix

Wie bereits erwähnt, sind die zentralen Größen zur Bestimmung der Instabilitäten Spur und Determinante des Zeitentwicklungsoperators $\underline{\underline{U}}(T, k)$. Wir wenden uns deshalb im Folgenden ihrer Berechnung zu.

3.4.1 Determinante

Wegen des stückweise konstanten, treibenden Feldes $h(t)$ lässt sich Gl. (3.6) direkt aufintegrieren. Wir erhalten für den Zeitentwicklungsoperators $\underline{\underline{U}}(t, k)$

$$\underline{\underline{U}}(t, k) = \begin{cases} \exp\{[\underline{\underline{L}}_0(k) + \underline{\underline{L}}_1] t\} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \exp\{\underline{\underline{L}}_0(k) (t - t_1)\} \exp\{[\underline{\underline{L}}_0(k) + \underline{\underline{L}}_1] t_1\} & \text{für } t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.14)$$

mit $\underline{\underline{L}}_0$ aus Gl. (3.4b) und $\underline{\underline{L}}_1$ aus Gl. (3.4c). Insbesondere nach einer Periode des treibenden Feldes erhalten wir aus Gl. (3.14)

$$\underline{\underline{U}}(T, k) = \exp\left\{\underline{\underline{L}}_0(k) (T - t_1)\right\} \exp\left\{[\underline{\underline{L}}_0(k) + \underline{\underline{L}}_1] t_1\right\} \quad (3.15)$$

Zur Berechnung der Determinanten verwenden wir den Produktsatz für Determinanten $\det(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}}) \det(\underline{\underline{B}})$ sowie die bekannte Exponentialidentität $\det(\exp(\underline{\underline{A}})) = \exp(\text{Sp}(\underline{\underline{A}}))$ [Rob]. Mit Hilfe dieser Beziehungen ergibt die Determinantenbildung von Gl. (3.15) unter Berücksichtigung von Gln. (3.4b) und (3.4c)

$$\begin{aligned} \det \underline{\underline{U}}(T, k) &= \exp\left\{\text{Sp} \underline{\underline{L}}_0(k) (T - t_1)\right\} \exp\left\{\text{Sp} [\underline{\underline{L}}_0(k) + \underline{\underline{L}}_1] t_1\right\} \\ &= \exp\left\{-2 \Gamma \left[\left(\alpha_k - \frac{b}{2}\right) T - \kappa\right]\right\} \quad , \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei $\alpha_k = H + a + Jk^2$ und $\kappa = h t_1$ bedeuten.

3.4.2 Spur

Zur Berechnung der Spur der Evolutionsmatrix aus Gl. (3.15) werden wir die darin auftretenden linearen Operatoren $\underline{\underline{L}}_i$ zuerst in einer für 2×2 -Matrizen geeigneten Basis entwickeln, ehe wir die Spur bilden. Die für die Entwicklung geeignete Basis besteht aus den 3 bekannten Pauli-Spinmatrizen $\underline{\underline{\sigma}}_i$ und der Einheitsmatrix. Der lineare Operator $\underline{\underline{L}}$ lässt sich nach folgender Vorschrift entwickeln:

$$\underline{\underline{L}} = m_0 \underline{\underline{1}} + \mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.17a)$$

mit

$$\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} = m_1 \underline{\underline{\sigma}}_1 + m_2 \underline{\underline{\sigma}}_2 + m_3 \underline{\underline{\sigma}}_3 \quad (3.17b)$$

und den bekannten Spinmatrizen

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.17c)$$

Dabei können die Entwicklungskoeffizienten m_i auch komplex sein. Bilden wir die Spur über die linearen Operatoren $\underline{\underline{L}}$ in der entwickelten Form (3.17a), so erhalten wir auf einfache Weise den Entwicklungskoeffizienten m_0 für die Einheitsmatrix

$$m_0 = \frac{1}{2} \text{Sp} \underline{\underline{L}} \quad . \quad (3.18)$$

In analoger Weise lassen sich die anderen Koeffizienten vermöge der einfachen Relation

$$m_i = \frac{1}{2} \text{Sp} (\boldsymbol{\sigma}_i \underline{\underline{L}}) \quad (3.19)$$

aus der vollen Matrix bestimmen. Da die linearen Operatoren in der Evolutionsmatrix im Exponenten auftreten, erhalten wir aus Gl. (3.17a) mit Hilfe der eben vorgenommenen Entwicklung:

$$\exp \{ \underline{\underline{L}} t \} = \exp \{ m_0 \underline{\underline{1}} t \} \exp \{ \boldsymbol{m} \boldsymbol{\sigma} t \} \quad (3.20)$$

Wir können den zweiten Faktor aus Gl. (3.20) unter Ausnutzung der Eigenschaften von Spinmatrizen in eine Taylor-Reihe entwickeln (s. Anhang B). Mit der Eigenschaft (B.1c), die gewährleistet, dass das Quadrat der Spinmatrizen gerade die Einheitsmatrix liefert, erhalten wir für den zweiten Faktor aus Gl. (3.20)

$$\exp \{ \boldsymbol{m} \boldsymbol{\sigma} t \} = \cosh(ct) \underline{\underline{1}} + \frac{\sinh(ct)}{c} \boldsymbol{m} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.21a)$$

mit

$$c^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \underline{\underline{L}}^2 - \frac{1}{4} (\text{Sp} \underline{\underline{L}})^2 \quad . \quad (3.21b)$$

Da die Entwicklungskoeffizienten m_i , wie bereits erwähnt, komplex sein können, ist die Summe der Quadrate nicht notwendigerweise immer positiv. Dieses werden wir gegen Ende des Abschnittes sehen.

Mit Hilfe der Entwicklung aus Gl. (3.20) mit Gl. (3.21a) und (3.21b) können wir einen expliziten Ausdruck für die Evolutionsmatrix $\underline{\underline{U}}(T, k)$ erhalten (s. Anhang B), der für eine direkte Berechnung der Spur geeignet ist. Bei der auszuführenden Multiplikation sind die Eigenschaften der Spinmatrizen hilfreich. Insbesondere die Eigenschaft, dass der Antikommutator zweier Spinmatrizen verschwindet (s. (B.1b)), und die bereits erwähnte Tatsache, dass das Quadrat einer Spinmatrix die Einheitsmatrix liefert (s. (B.1c)), vereinfachen das Ergebnis enorm. Die daran anschließende Spurbildung wird unter Berücksichtigung der Spineigenschaft aus Gl. (B.1a), d.h. der Spurlosigkeit von Spinmatrizen, durchgeführt.

Somit erhalten wir aus der Spurbildung von Gl. (3.15) mit den Entwicklungen aus (3.20) und (3.21a) sowie (3.21b) und der Darstellung des linearen

Operators aus Gl. (3.4b) und (3.4c) folgendes Ergebnis für die Spur des Zeitentwicklungsoperators:

$$\begin{aligned} \text{Sp}\underline{U}(T, k) = & 2 \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{Sp}\underline{L}_{\underline{0}}(T - t_1) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\underline{L}_{\underline{0}} + \underline{L}_{\underline{1}} \right] t_1 \right\} \\ & \times \left[\cosh c_2(T - t_1) \cosh c_1 t_1 + \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \frac{\sinh c_2(T - t_1)}{c_2} \frac{\sinh c_1 t_1}{c_1} \right] \end{aligned} \quad (3.22a)$$

mit

$$c_1^2 = -(\alpha_k - h)^2 + b(\alpha_k - h) + \Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3.22b)$$

$$c_2^2 = -\alpha_k^2 + b\alpha_k + \Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3.22c)$$

$$\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 = \Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \alpha_k(\alpha_k - h) + b(\alpha_k - \frac{h}{2}) \quad (3.22d)$$

$$\alpha_k = H + a + Jk^2 \quad (3.22e)$$

und

$$\frac{1}{2} \text{Sp}\underline{L}_{\underline{0}}(T - t_1) + \frac{1}{2} \text{Sp}[\underline{L}_{\underline{0}} + \underline{L}_{\underline{1}}] t_1 = -\Gamma \left[\left(\alpha_k - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right] \quad (3.22f)$$

Bevor wir die Bifurkationen im Einzelnen genauer betrachten, wird Gl. (3.22a) in eine für diese Zwecke geeignetere Form überführt. Unter der Annahme, dass das statische Feld H und die Anisotropie in z -Richtung zusammen größer als die Anisotropie in x -Richtung sind, stellen wir fest, dass in den eben berechneten Gleichungen für die Koeffizienten c_1 in Gl. (3.22b) und c_2 in Gl. (3.22c) die jeweiligen rechten Seiten fast immer negativ sind. Nur bei kleinen statischen Feldern sind die rechten Seiten positiv. Wir werden uns im folgenden in den entscheidenden Fällen mit großen statischen Feldern befassen.

Um dieses zu berücksichtigen wird Gl. (3.22a) in folgende Form überführt:

$$\text{Sp}\underline{U}(T, k) = 2 p(T, k) q(T, k) \quad (3.23a)$$

mit

$$p(T, k) = \exp \left\{ -\Gamma \left[\left(\alpha_k - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right] \right\} = \sqrt{\det \underline{U}(T, k)} \quad (3.23b)$$

$$\begin{aligned} q(T, k) = & \cos(\omega_1(k) t_1) \cos(\omega(k) (T - t_1)) + \\ & \frac{b(\alpha_k - \frac{h}{2}) - \alpha_k(\alpha_k - h) + \Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\omega_1(k) \omega(k)} \sin(\omega_1(k) t_1) \sin(\omega(k) (T - t_1)) \end{aligned} \quad (3.23c)$$

und

$$\omega_1^2(k) = (\alpha_k - h)^2 - b(\alpha_k - h) - \Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3.23d)$$

$$\omega^2(k) = \alpha_k^2 - b\alpha_k - \Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3.23e)$$

Die hierbei auftretenden Frequenzen aus Gl. (3.23d) und Gl. (3.23e) können je nach Wahl der darin auftretenden Parameter α_k , b , h entweder rein reell oder rein imaginär sein. Dementsprechend tauchen im Ausdruck für $q(T, k)$ entweder trigonometrische oder hyperbolische Funktionen mit reellen Argumenten auf.

Weiterhin sehen wir, dass die Ausdrücke aus Gl. (3.23b) und (3.23c) durch die Austauschwechselwirkung von der Wellenzahl k abhängen. Für das hier betrachtete System ist es charakteristisch, dass nach Gl. (3.22e) die Wellenzahlabhängigkeit in der effektiven Größe α_k auftritt, die als Hauptbestandteil das statische Feld H aufweist.

Durch die Wahl der Parameter α_k , b und h lassen sich in der weiteren Betrachtung der Funktion $q(T, k)$ bzw. der Spur des Evolutionsoperators folgende drei Bereiche unterscheiden.

- Der für die weitere Vorgehensweise dieser Arbeit wichtige und interessante Bereich ist der oszillatorische Bereich. Für diesen Bereich gilt nach Gl. (3.23d) und (3.23e): $\omega_1^2 > 0$ und $\omega^2 > 0$. Diese Bedingungen lassen sich weitestgehend durch die Stabilitätsbedingung (3.5a) des ungetriebenen Systems erfüllen. Einzig in der Nähe der Instabilitätsgrenze ist die Positivität von $\omega_1^2(k)$ und $\omega^2(k)$ nicht mehr gewährleistet. Da dieser kleine Bereich nahe der Instabilitätsgrenze im Verlaufe der Arbeit keine Rolle spielen wird, werden wir darauf hier nicht genauer eingehen.
- Gilt hingegen $\omega_1^2(k) < 0$ und $\omega^2(k) > 0$, so sprechen wir vom gemischten Bereich, da wir in Gl. (3.23c) die zugehörigen trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische Funktionen ersetzen müssen. Da in diesem kleinen Bereich allerdings die stationäre Lösung im ungetriebenen Fall fast überall instabil ist, spielt dieser Bereich keine Rolle für den weiteren Verlauf der Arbeit.
- Gilt hingegen $\omega_1^2(k) < 0$ und $\omega^2(k) < 0$, so sprechen wir vom exponentiellen Bereich, da wir in Gl. (3.23c) alle trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische Funktionen ersetzen müssen. Da in diesem Bereich die stationäre Lösung im ungetriebenen Fall überall instabil ist, spielt auch dieser Bereich keine Rolle für den weiteren Verlauf der Arbeit.

Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit sehen, dass wir uns auf den oszillatorischen Bereich zur Untersuchung des Systems in der Nähe der Hopf-Bifurkation beschränken können. Wir werden uns im folgenden Kapitel überlegen, unter welchen Bedingungen die Hopf-Bifurkation auftritt, da sie für

das Auffinden von starken Resonanzen wichtig ist. Zusätzlich möchten wir den Bereich, in dem die Hopf–Bifurkation auftreten wird, möglichst groß gestalten. Wir werden uns daher im folgenden Kapitel der Hopf–Bifurkation zuwenden in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Parameter α , b , Γ , T , h und t_1 .

Kapitel 4

Auftreten der Hopf–Instabilität

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist die systematische Herleitung einer nicht eichinvarianten Amplitudengleichung, deren Beiträge nichtlinear in den Amplituden sind. Aus der Literatur ist bekannt, dass Amplitudengleichungen mit linearen, nicht eichinvarianten Beiträgen in der Umgebung von Flip–Bifurkationen auftreten (s. z.B. [Miln]). Dahingegen können nicht eichinvariante Amplitudengleichungen mit nichtlinearen, nicht eichinvarianten Termen in Folge einer Hopf–Bifurkation auftreten. Aus diesem Grunde konzentrieren wir unser Interesse in diesem Kapitel auf das Aufspüren und die Analyse der Hopf–Instabilität.

4.1 Hopf–Instabilität

Dazu betrachten wir die notwendige Hopf–Bifurkationsbedingung aus Gl. (3.11a) und die explizite Form der Determinante des Zeitevolutionsoperators aus Gl. (3.16). Da die Wellenzahl k nur quadratisch im Exponenten vorkommt, nimmt Gl. (3.16) das Maximum bezüglich k für $k = q_c = 0$ ein. Somit haben wir die kritische Wellenzahl $q_c = 0$ bestimmt.

Aus der Hopf–Bifurkationsbedingung aus Gl. (3.11a) folgt mit $q_c = 0$ auch direkt, dass

$$\kappa = \left(\alpha - \frac{b}{2}\right) T \quad (4.1)$$

sein muss. Zusätzlich muss natürlich noch die Bedingung an die Spur des Zeitentwicklungsoperators aus Gl. (3.11b) erfüllt sein. Mit der expliziten Form für $\text{Sp}\underline{U}(T, k)$ aus Gl. (3.23a) können wir Gl. (3.11b) auf eine Relation für die in Gl. (3.23a) enthaltene Funktion $q(T, q_c)$ abbilden. Dabei werten wir die Hopf–Bifurkationsbedingung aus Gl. (3.11a) mit der Bedingungsgleichung an

die Determinante des Zeitentwicklungsoperators (3.23b) aus. Berücksichtigen wir diese Relationen, so erhalten wir letztendlich aus (3.11b)

$$|q(T, k = q_c = 0)| < 1 \quad (4.2)$$

Die Schwierigkeit bei der Bestimmung der Hopf–Bifurkation liegt in der Bestimmung der Gültigkeitsbereiche, die durch Gl. (4.2) festgelegt sind. Wir wenden uns daher im Weiteren der Auswertung von Gl. (4.2) zu.

4.2 Die Funktion $q(T, 0)$

Wir werden uns bei der Untersuchung auf den oszillatorischen Bereich beschränken, da in diesem Bereich die Hopf–Bedingung aus Gl. (4.1) sicher erfüllt ist. Zur weiteren Betrachtung formen wir Gl. (3.23c) auf einen äquivalenten Ausdruck um:

$$\begin{aligned} q(T, 0) = 1 - & \left[\sin^2 \left(\frac{x_+(T, 0)}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{x_-(T, 0)}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{Z(0)}{N(0)} \left[\sin^2 \left(\frac{x_+(T, 0)}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{x_-(T, 0)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3a)$$

mit

$$x_+(T, 0) = \omega_1 t_1 + \omega(T - t_1) \quad (4.3b)$$

$$x_-(T, 0) = \omega_1 t_1 - \omega(T - t_1) \quad (4.3c)$$

$$Z(0) = b \left(\alpha - \frac{h}{2} \right) - \alpha(\alpha - h) + \Gamma^2 \left(\frac{b}{2} \right)^2 \quad (4.3d)$$

$$N(0) = \omega_1 \omega \quad (4.3e)$$

und $\omega_1 := \omega_1(0)$ aus Gl. (3.23d) und $\omega := \omega(0)$ aus Gl. (3.23e) jeweils für $k = 0$, sowie $\alpha = H + a$.

Ziel der Untersuchung ist es, einen möglichst großen Geltungsbereich für die Existenz der Hopf–Bifurkation zu finden. Insbesondere werden wir feststellen, dass die Länge des Zeitintervalls in dem die treibende Feldstärke nicht verschwindet, d.h. t_1 , eine entscheidende Rolle spielen wird. Wir werden dies im Weiteren genauer untersuchen.

4.2.1 Transformation auf neue Parameter

Wir werden speziell für diese Untersuchung neue Parameter ρ und ξ einführen¹. Im Hinblick auf die zu fordernde Stabilitätsbedingung an die stationäre

¹Da wir die Untersuchung für $k = 0$ durchführen, verzichten wir der Übersichtlichkeit halber jeweils auf eine explizite Angabe von $k = q_c = 0$

Lösung aus Gl. (3.5a) führen wir den Parameter ρ durch folgende Vorschrift ein:

$$\rho := \frac{2\alpha}{b} - 1 \quad (4.4a)$$

So nimmt die Stabilitätsbedingung aus Gl. (3.5a) mit Hilfe von ρ aus Gl. (4.4a) die einfache Form $\rho > 1$ an. Ein weiterer neuer Parameter ξ bezeichnet das Verhältnis des Zeitintervalls t_1 , in dem das treibende Feld wirkt, zu dem Zeitintervall $T - t_1$, in dem kein treibendes Feld vorhanden ist.

$$\xi := \frac{t_1}{T - t_1} \quad \text{mit} \quad \xi \in [0, 1] \quad (4.4b)$$

Wir können uns bei dieser Betrachtung für t_1 auf das Intervall $[0, T/2]$ beschränken, da die Funktion $q(T, 0)$ aus Gl. (4.3a) invariant bleibt unter der Transformation $t_1 \rightarrow T - t_1$ und $H \rightarrow H - h$. So wird für $\xi = 1$ die Länge des Zeitintervalls $t_1 = T/2$, während wir für $\xi \rightarrow 0$ die Länge des Zeitintervalls t_1 verschwindet.

Dann erhalten wir für die Bedingung der Hopf-Instabilität aus Gl. (4.1) mit Gln. (4.4a), (4.4b)

$$h = \frac{b}{2} \rho \frac{1 + \xi}{\xi} \quad (4.5)$$

und für die Komponenten der Funktion $q(T, 0)$ aus Gln. (3.23d), (3.23e) und (4.3d) unter Ausnutzung der Gln. (4.5), (4.4a) und (4.4b)

$$\omega_1 = \frac{b}{2\xi} \sqrt{(\rho^2 - \xi^2) - \Gamma^2 \xi^2} \quad (4.6a)$$

$$\omega = \frac{b}{2} \sqrt{(\rho^2 - 1) - \Gamma^2} \quad (4.6b)$$

$$Z(0) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \left(\frac{\xi + \rho^2}{\xi} + \Gamma^2\right) \quad (4.6c)$$

Die Funktion $q(T, 0)$ ist nun von 4 Parametern abhängig: ρ , ξ , b und T . Wir werden uns zunächst einer graphischen Darstellung dieser Funktion zuwenden.

4.2.2 Graphische Darstellung der Funktion $q(T, 0)$

Wir werden eine graphische Darstellung der Funktion $q(T, 0)$ in Abhängigkeit von ρ und ξ bei festgehaltenen Werten für b und T diskutieren. Dabei sind nach Gl. (4.2) diejenigen Bereiche von Interesse, die betragsmäßig kleiner sind als eins. Sie garantieren uns bei entsprechender Wahl der Parameter, dass hier eine Hopf-Bifurkationslinie nach Gl. (4.1) vorliegt.

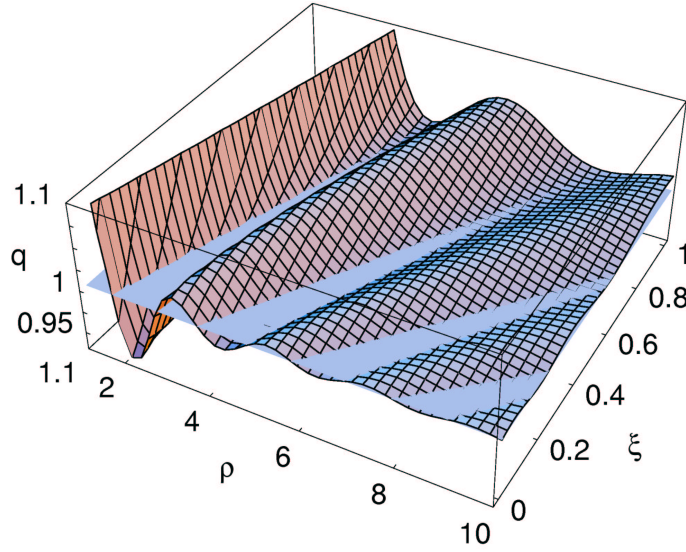


Abbildung 4.1: Funktion $q(T, 0)$ für $b = 3$, $T = 1$ und $\Gamma = 0.1$. Die blaue Fläche repräsentiert $q(T, 0) = 1$

In Abb. 4.1 haben wir die Funktion $q(T, 0)$ aus Gl. (4.3a) für eine endliche Dämpfung dargestellt. Die zusätzlich auftretende blaue Fläche repräsentiert $q(T, 0) = 1$.

Interessant sind hierbei die Bereiche, in denen die Funktion $q(T, 0)$ unterhalb der Ebene $q(T, 0) = 1$ liegt. Die Ausdehnung dieser Bereiche möchten wir optimieren. Wir stellen an Hand von Abb. 4.1 fest, dass für kleine Werte von ξ (d.h. $\xi \rightarrow 0$) die Bereiche, für die wir uns interessieren, sehr groß werden. Wir werden sehen, dass wir diesen Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ dadurch am besten realisieren können, indem wir in unserem Modell das stückweise konstant treibende Feld durch eine Abfolge periodischer δ -Kicks ersetzen. Gehen wir hingegen zu dem anderen Grenzfall $\xi \rightarrow 1$ über, so sehen wir in Abb. 4.1, dass sich die Bedingung aus Gl. (4.2) nicht mehr erfüllen lässt, da die Funktion $q(T, 0)$ die blaue Fläche nicht mehr schneidet.

Diese quantitativen Resultate wollen wir im Abschnitt 4.3 analytisch fundieren. Zuvor werden wir aber noch den Einfluss der Variation insbesondere des Parameters b auf die Funktion $q(T, 0)$ qualitativ anhand von Diagrammen untersuchen. Dabei werden wir diese in Abb. 4.2 — 4.4 ansehen, die wir im Limes $\Gamma = 0$ dargestellt haben. Durch Vergleich von Abb. 4.1 mit Abb. 4.2 stellen wir fest, dass zwischen diesen beiden Abbildungen keine signifikanten Unterschiede bestehen, obwohl wir den Wert der Dämpfung geändert haben. Für die qualitative Beschreibung des Einflusses des Parameters b können wir

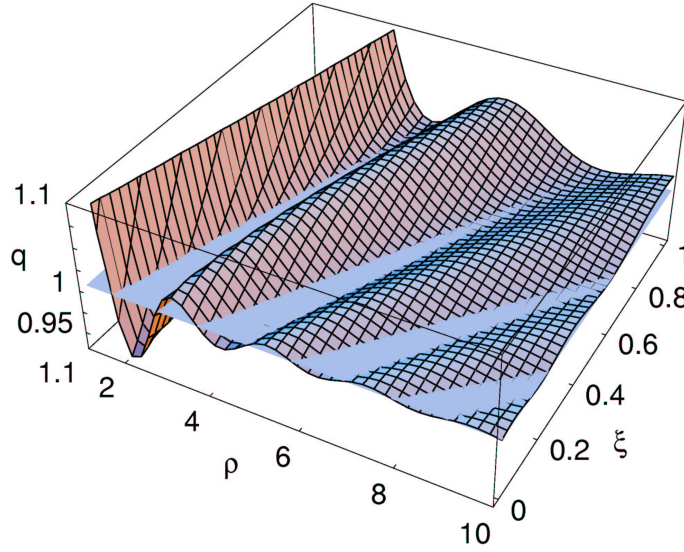


Abbildung 4.2: Funktion $q(T, 0)$ für $b = 3$, $T = 1$ und $\Gamma = 0$. Die blaue Fläche repräsentiert $q(T, 0) = 1$

uns daher auf die entsprechenden Diagramme für $\Gamma = 0$ beschränken. Die Diskussion dieser Diagramme nimmt dabei die Resultate der analytischen Berechnungen aus Abschnitt 4.3 vorweg.

Vergrößern wir den Wert des Parameters b , so stellen wir fest, dass die uns interessierenden Bereiche für kleine Werte des Parameters ξ immer größer werden. Wir erhalten sogar den Fall (s. Abb. 4.4), dass die Funktion $q(T, 0)$ bei kleinem Wert von ξ die Hopf-Bedingungsgleichung (4.2) für alle Werte von ρ erfüllen kann. Wir wollen im nächsten Abschnitt die qualitativ erhaltenen Eigenschaften der Funktion $q(T, 0)$ analytisch beschreiben, um die bestmögliche Form des treibenden Feldes festzulegen, bei der der größtmögliche Bereich der Hopf-Bifurkation auftreten kann.

4.3 Entstehung der Hopf-Bifurkation

Da die Auswertung der Hopf-Bedingung aus Gl. (4.2) mit den Gl. (4.3a) sowie den neuen Parametern ρ und ξ in Gln. (4.6a) — (4.6c) für endliche Dämpfungen Γ etwas aufwändig ist, beschränken wir uns auf den Fall verschwindender Dämpfungen $\Gamma \approx 0$. Die folgenden Untersuchungen an der Funktion $q(T, 0)$ werden auch für kleine, endliche Dämpfungen gelten, da Γ nur quadratisch in $q(T, 0)$ eingeht. Dies wurde auch in der qualitativen Analyse aus Abschnitt 4.2.2 deutlich, da im Vergleich der Abb. 4.2 für $\Gamma = 0$

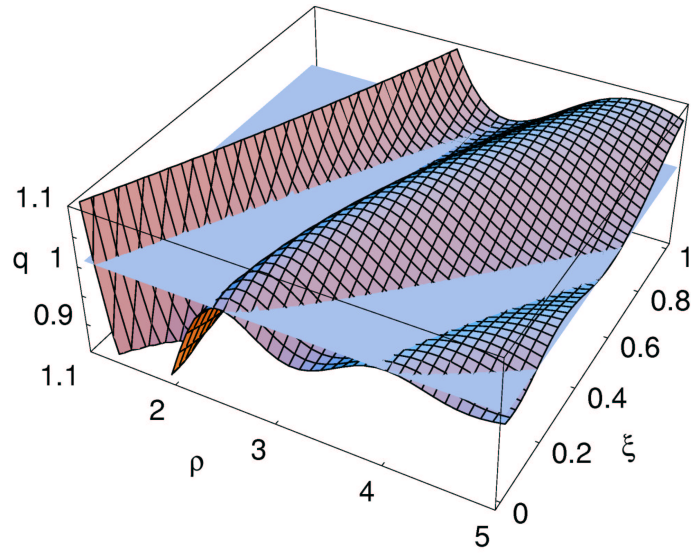


Abbildung 4.3: Funktion $q(T, 0)$ für $b = 4$, $T = 1$ und $\Gamma = 0$. Die blaue Fläche repräsentiert $q(T, 0) = 1$

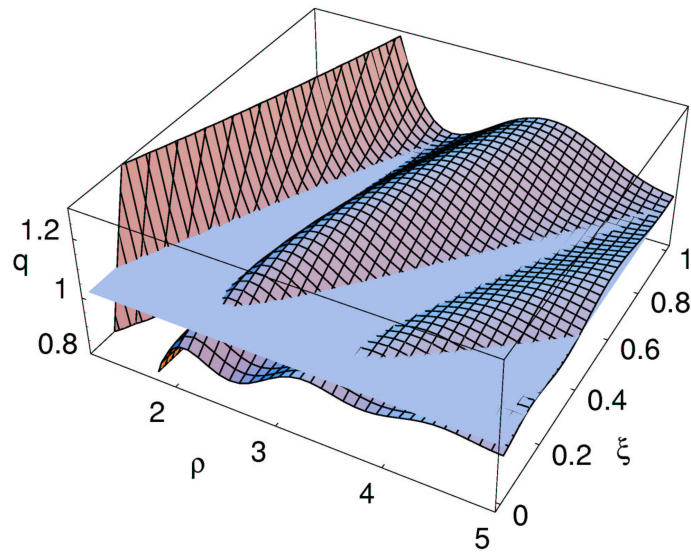


Abbildung 4.4: Funktion $q(T, 0)$ für $b = 5$, $T = 1$ bei $\Gamma = 0$. Die blaue Fläche repräsentiert $q(T, 0) = 1$

mit der Abb. 4.1 für $\Gamma = 0.1$ für festgehaltene Werte von b und T keine wesentlichen Unterschiede in den Funktionsverläufen auftreten. Wir werden im folgenden die Funktion $q(T, 0)$ aus Gl. (4.3a) analytisch für drei Werte von ξ im Falle $\Gamma = 0$ auswerten.

Der Fall $\xi = 1$

Für $\xi = 1$, d.h. für $t_1 = T/2$, erhalten wir für $\Gamma = 0$ aus Gl. (4.3a) mit Gln. (4.6a) – (4.6c) für die Funktion $q(T, 0)$

$$q(T, 0) = 1 + \frac{2}{\rho^2 - 1} \sin^2 \left(\frac{bT}{4} \sqrt{\rho^2 - 1} \right) \geq 1 \quad . \quad (4.7)$$

Somit kann Gl. (4.7) die Bedingungsgleichung (4.2) nicht erfüllen. In den Abb. 4.2 – 4.4 ist dies auch deutlich zu sehen, dass die Fläche $q(T, 0)$ für $\xi = 1$ immer oberhalb der Ebene $q(T, 0) = 1$ liegt. Einzig an den Stellen, an denen die Sinusfunktion in Gl. (4.7) verschwindet, d.h. für

$$\frac{bT}{4} \sqrt{\rho^2 - 1} = n\pi \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.8)$$

nimmt die Funktion $q(T, 0)$ den Wert 1 an, d.h. die Funktion $q(T, 0)$ aus den Abb. 4.2 – 4.4 berührt in diesen Punkten aus (4.8) die blaue Fläche. Da wir auf diese Weise keinen Gültigkeitsbereich für eine Hopf–Bifurkation bei endlicher Dämpfung erzeugen können, werden wir dem Zeitintervall t_1 des treibenden Feldes einen anderen Wert zuweisen müssen. In den hier gewählten Parametern bedeutet dies, dass wir im folgenden den Fall $\xi \neq 1$ betrachten.

Der Fall $\xi \neq 1$

Wir betrachten die Funktion $q(T, 0)$ aus Gl. (4.3a) im Hinblick auf die Bedingungsgleichung (4.2), um einen Bereich zu erhalten, in dem die Hopf–Bifurkationslinie im Falle endlicher Dämpfung auftreten kann. Die Grenzen der Bedingungsgleichung (4.2) sind in $q(T, 0) = 1$ gegeben. Setzen wir diese Bedingung in Gl. (4.3a) ein, so erhalten wir für $\Gamma = 0$

$$\sqrt{\frac{Z(0) + N(0)}{Z(0) - N(0)}} \sin \left(\frac{x_-(T, 0)}{2} \right) = \pm \sin \left(\frac{x_+(T, 0)}{2} \right) \quad (4.9)$$

mit (s. Gl. (4.3b), (4.3c), (4.6a), (4.6b), (4.6c), (4.3e))

$$x_+(T, 0) = \frac{bT}{4} \frac{1}{1+\xi} \left(\sqrt{\rho^2 - \xi^2} + \sqrt{\rho^2 - 1} \right) \quad (4.10a)$$

$$x_-(T, 0) = \frac{bT}{4} \frac{1}{1+\xi} \left(\sqrt{\rho^2 - \xi^2} - \sqrt{\rho^2 - 1} \right) \quad (4.10b)$$

$$\sqrt{\frac{Z(0) + N(0)}{Z(0) - N(0)}} = \frac{\sqrt{(\rho+1)(\rho+\xi)} + \sqrt{(\rho-1)(\rho-\xi)}}{\sqrt{(\rho+1)(\rho+\xi)} - \sqrt{(\rho-1)(\rho-\xi)}} \quad (4.10c)$$

Wir betrachten die Gl. (4.9) und werden die rechte und die linke Seite dieser Gleichung in Abhängigkeit von ρ vergleichen. Um dies übersichtlich zu gestalten, wird Gl. (4.9) wie folgt verkürzt geschrieben:

$$f_{LS}(\rho) = f_{RS}(\rho)$$

mit

$$f_{LS}(\rho) = \sqrt{\frac{Z(0) + N(0)}{Z(0) - N(0)}} \sin \left(\frac{x_-(T, 0)}{2} \right) \quad (4.11a)$$

$$f_{RS}(\rho) = \pm \sin \left(\frac{x_+(T, 0)}{2} \right) \quad (4.11b)$$

Die Funktion $f_{RS}(\rho)$ aus Gl. (4.11b) ist eine oszillierende Funktion in Abhängigkeit von ρ . Der Funktion $f_{LS}(\rho)$ aus Gl. (4.11a) sehen wir die funktionelle Abhängigkeit von ρ nicht direkt anhand von Gl. (4.11a) an. Durch genaue Betrachtung stellen wir jedoch fest, dass die Funktion $f_{LS}(\rho)$ monoton mit ρ fällt. Sie nimmt dabei folgende Grenzwerte für $\rho = 1$ und $\rho \rightarrow \infty$ an:

$$\lim_{\rho=1} f_{LS}(\rho) \rightarrow \sin \left(\frac{bT}{4} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right) \quad \text{und} \quad \lim_{\rho=\infty} f_{LS}(\rho) \rightarrow \frac{bT}{4} \frac{1-\xi}{1+\xi} \quad (4.12)$$

In Abb. 4.5 haben wir $f_{LS}(\rho)$ und $f_{RS}(\rho)$ aufgetragen, wobei $bT/4 \cong 1$ und $1/2 \leq \xi \leq 1$ gewählt wurde.

Die Funktion $f_{LS}(\rho)$ ist in Abb. 4.5 durch den monoton fallenden Graphen gegeben. Im Grenzfall $\xi = 0$ erkennen wir anhand von Gln. (4.10a), (4.10b) sowie (4.3c), dass $f_{LS}(\rho) = 0$ gilt, d.h. dass der Funktionsverlauf mit der Abszisse zusammenfällt. Für kleines aber endliches ξ löst sich der Funktionsverlauf von der Abszisse und bildet mit der oszillierenden Funktionen $f_{RS}(\rho)$ Schnittpunkte aus. Die Bereiche, in denen in Abb. 4.5 die Funktion $f_{LS}(\rho)$ oberhalb der Funktion $f_{RS}(\rho)$ liegt, sind die Parametergebiete in denen die Bedingung $|q(T, 0)| < 1$ erfüllt ist. In diesen Bereichen kann dann für endliche Dämpfung eine Hopf-Bifurkation auftreten.

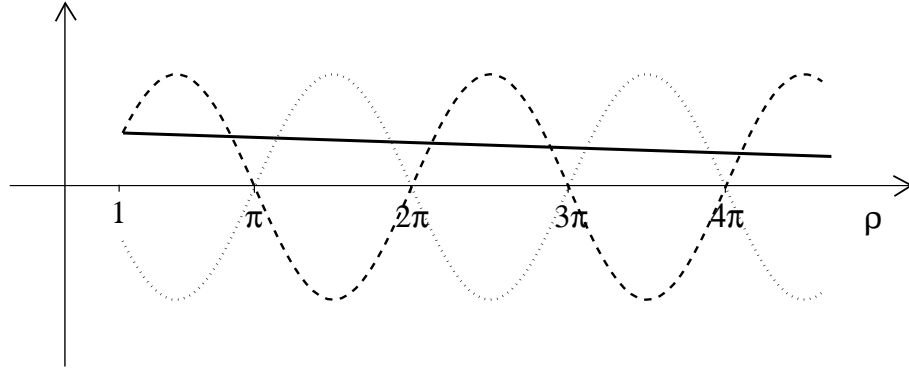


Abbildung 4.5: $f_{RS}(\rho)$ für beide Werte des Vorzeichens (positiv: unterbrochen, negativ: gepunktet) und $f_{LS}(\rho)$ (durchgezogene Linie) in Abhängigkeit von ρ

Der Fall $\xi = 0$

Wie wir bereits mit Hilfe der Abbildungen 4.1 — 4.4 gesehen haben, birgt diese Wahl von ξ den größtmöglichen Existenzbereich für eine Hopf-Bifurkation. Zur quantitativen Analyse können wir uns wieder der Gl. (4.9) bedienen. Wir bestimmen die Grenzen der Bedingungsgleichung (4.2). Diese nimmt eine einfache Form an, wenn wir folgende Transformation auf eine neue Variable R vornehmen:

$$\rho = 1/2(R + 1/R) \quad (4.13)$$

Mit dieser neuen Variablen erhalten wir aus Gl. (4.9) und Gl. (4.10a) — (4.10c) folgende zu betrachtende Gleichung:

$$g_{LS}(R) = g_{RS}(R)$$

mit

$$g_{LS}(R) = R \sin\left(\frac{bT}{4R}\right) \quad \text{und} \quad g_{RS}(R) = \pm \sin\left(\frac{bTR}{4}\right) \quad (4.14a)$$

Die Funktion $g_{LS}(R)$ von Gl. (4.14a) steigt immer monoton mit wachsendem R . Die Funktion $g_{RS}(R)$ ergibt wieder eine oszillatorische Funktion. Eine graphische Darstellung der Funktionen $g_{LS}(R)$ und $g_{RS}(R)$ für $bT/4 \cong 1$ und $1/2 \leq \xi \leq 1$ finden wir in Abb. 4.6

Analog zur Beschreibung zu Abb. 4.5 haben wir auch hier wieder zwei oszillierende Funktionen, die die Funktion $g_{RS}(R)$ aus Gl. (4.14a) repräsentieren. Die Funktion $g_{LS}(R)$ aus Gl. (4.14a) wird jetzt durch einen monoton steigenden Graphen in Abb. 4.6 veranschaulicht. Wir betrachten wiederum die

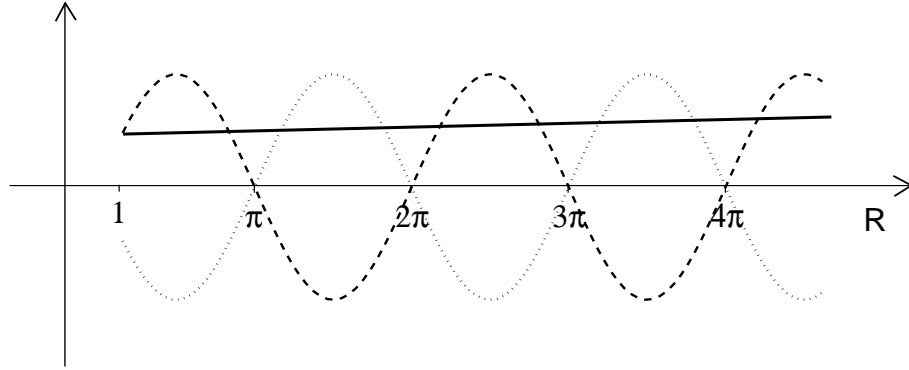


Abbildung 4.6: $g_{RS}(R)$ für beide Wahlen des Vorzeichens (durchgezogene und gestrichelte Linie) sowie $g_{LS}(R)$ (durchgezogene Linie) nach Gl. (4.14a)

Schnittpunkte von $g_{LS}(R)$ und $g_{RS}(R)$. Insbesondere die Bereiche in Abb. 4.6, in denen $g_{LS}(R) > g_{RS}(R)$ gilt, sind im Falle endlicher Dämpfung für die Existenzbereiche der Hopf-Bifurkation wichtig, da hier die wichtige Beziehung $|q(T, 0)| < 1$ erfüllt werden kann. Da weiterhin die Funktion $g_{LS}(R)$ ansteigt, können wir abschließend noch Angaben über das Verschwinden der Schnittpunkte der Funktionen $g_{LS}(R)$ und $g_{RS}(R)$ machen, da die Steigung im wesentlichen von der Wahl des Parameters b abhängt².

Hierzu betrachten wir die Steigungen von $g_{LS}(R)$ und $g_{RS}(R)$ (mit positiven Vorzeichen) von (4.14a). Sie werden bei $R = 1$ gleich, falls gilt:

$$\tan \frac{bT}{4} = \frac{bT}{2} \quad (4.15)$$

Hieraus folgt $b = 4.66$ für $T = 1$. Man kann sich ohne weiteres davon überzeugen, dass dieser Wert von b gleichzeitig derjenige ist, von dem an die Funktion $q(T, 0)$ bei $R = 1$ unter den Wert 1 fällt. Damit ist gezeigt, dass, wenn die Funktion $q(T, 0)$ erst einmal kleiner als 1 ist, dies für alle Werte von R gültig bleibt. Eine obere Grenze ist für $bT = 2\pi$ gegeben. Geht man über diese obere Grenze hinaus, erhält man eine ganze Kaskade weiterer Instabilitäten, die in dieser Arbeit nicht von Interesse sind.

Wie wir mit dieser analytischen Betrachtung für den dämpfungslosen Fall gesehen haben, erhalten wir für kleines ξ , d.h. für den Fall, dass das treibende Feld in kurzen Intervallen t_1 verglichen mit der Periodendauer wirksam ist, einen möglichst großen Gültigkeitsbereich, in dem die wichtige Bedingungsgleichung für die Hopf-Bifurkation $|q(T, k)| < 1$ gilt. Der Wert $\xi = 0$

²Die ganze Betrachtung lässt sich auch für $q(T, 0) = -1$ mit Gl. (4.9) durchführen. Hier ergeben sich allerdings keine Schnittpunkte der rechten und linken Seite.

entspricht dem Verschwinden des Zeitintervalls t_1 . Um im Falle endlicher Dämpfung einen möglichst großen Bereich zu erhalten, in dem eine Hopf-Instabilität auftreten kann, wählen wir das Zeitintervall t_1 infinitesimal klein, die Amplitude des treibenden Feldes allerdings unendlich groß, so dass wir unser System mit einem Feld treiben, welches aus einer Abfolge periodisch in der Zeit auftretender δ -Kicks besteht. Im folgenden Kapitel wenden wir uns der genaueren Analyse der Instabilitäten in diesem δ -gekickten System zu. Wir werden ein Bifurkationsdiagramm erstellen und dieses ausführlich beschreiben.

Kapitel 5

Das δ –geklickte System

In diesem Kapitel wenden wir uns der speziellen Form des treibenden Feldes zu, das aus periodisch in der Zeit wiederkehrenden δ –Kicks besteht. Wie wir bereits gesehen haben, garantiert uns diese Form des Treibens einen großen Existenzbereich für die uns interessierende Hopf–Instabilität.

Diese Wahl des treibenden Feldes erlaubt eine weitgehend analytische Diskussion des Stabilitätsverhaltens. Wir werden die Auswirkungen auf die für die Bestimmung der Instabilitäten wichtigen Größen, Determinante und Spur des Zeitentwicklungsoperators, betrachten. Wir bestimmen die Grenzen der Stabilität der stationären Lösung, tragen diese in einem geeigneten Diagramm auf und diskutieren deren Erscheinungsbild.

5.1 Determinante und Spur des Zeitentwicklungsoperators

Die Konstruktion des treibenden Feldes hat wiederum Einfluss auf die für die Bestimmung der Instabilitäten wichtigen Größen, die Spur und die Determinante des Zeitevolutionsoperators. Deshalb werden wir zunächst auf die Modifikation dieser Größen eingehen. Wir werden dabei jeweils von den Ergebnissen ausgehen, die wir für das stückweise konstant treibende Feld erhalten haben. Erst dann werden wir den Übergang zum δ –Kick vornehmen, bei dem $h \rightarrow \infty$, $ht_1 = \kappa$ sowie $t_1 \rightarrow 0$ und $T - t_1 = T$ zu setzen sind.

5.1.1 Determinante

Wie bereits erwähnt gehen wir im Folgenden von dem Zeitevolutionsoperator $\underline{\underline{U}}(T, k)$ aus Gl. (3.14) aus, der dem Fall des stückweise konstant treibenden Feldes entnommen wurde, wie in Abschnitt 3.4.1 bereits ausgeführt wurde. Den Übergang zum δ -Kick ist in diesem Falle sehr einfach, da die Bedingung $ht_1 = \kappa$ bereits eingesetzt wurde. Wir erhalten für die Determinante des Zeitentwicklungsoperators (siehe Gl. (3.16)):

$$\det \underline{\underline{U}}(T, k) = \exp \left\{ -2 \Gamma \left(\left(\alpha_k - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right) \right\} \quad (5.1)$$

5.1.2 Spur

Auch für die Berechnung der Spur des Zeitevolutionsoperators für das δ -gekickte System starten wir von dem entsprechenden Ausdruck für das stückweise konstant treibende Feld aus Gl. (3.23a) mit Gl. (3.23b) — (3.23e). Die in Gl. (3.23a) auftretende Determinante des Zeitentwicklungsoperators haben wir bereits im vorigen Abschnitt mit Gl. (5.1) bestimmt.

Es bleibt somit einzig, die Funktion $q(T, k)$ aus Gl. (3.23c) in die Form für das δ -gekickte System zu überführen. Anhand der bereits erwähnten Ersetzungsvorschriften $h \rightarrow \infty$, $t_1 \rightarrow 0$, $T - t_1 \rightarrow T$ und $ht_1 = \kappa$ erhalten wir für die Argumente der trigonometrischen Funktionen aus Gl. (3.23c) die Ausdrücke $\omega_1(k) t_1 \rightarrow \kappa$ und $\omega(k) (T - t_1) \rightarrow \omega(k) T$ mit $\omega(k)$ aus (3.23e) sowie $\alpha_k = H + a + Jk^2$.

Der Quotient in Gl. (3.23c) wird somit zu

$$\begin{aligned} \frac{b(\alpha_k - \frac{h}{2}) - \alpha_k(\alpha_k - h) + \Gamma^2(\frac{b}{2})^2}{\omega_1(k) \omega(k)} &= \frac{\overbrace{t_1(b(\alpha - \frac{h}{2}) - \alpha_k(\alpha_k - h))}^{\rightarrow -\frac{b}{2}\kappa} + \overbrace{\Gamma^2(\frac{b}{2})^2 t_1}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{t_1 \omega_1(k)}_{\rightarrow \kappa} \underbrace{\omega(k)}_{\rightarrow \omega(k)}} \\ &= \frac{\alpha_k - \frac{b}{2}}{\omega(k)} . \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die Funktion $q(T, k)$, die nach Gl. (3.23a) in die Spur des Zeitentwicklungsoperators eingeht, aus (3.23c) beim Übergang zum δ -gekickten System

$$q(T, k) = \cos \kappa \cos \omega(k) T + \frac{\alpha_k - \frac{b}{2}}{\omega(k)} \sin \kappa \sin \omega(k) T \quad (5.2a)$$

mit (vergl. Gl. (3.23e))

$$\omega(k) = \sqrt{\alpha_k (\alpha_k - b) - \Gamma^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad . \quad (5.2b)$$

Während die Kickstärke κ reell und positiv ist, kann $\omega(k)$ je nach Wahl der darin auftretenden Parameter α_k und b rein reell oder rein imaginär sein. Über die Austauschwechselwirkung hängen auch diese Ausdrücke für die Spur des Zeitentwicklungsoperators aus Gl. (3.23a) mit (5.1) und (5.2a) wiederum von der Wellenzahl k der Störung ab. Die effektive Größe α_k setzt sich auch hier aus α , d.h. im wesentlichen der Stärke des statischen Feldes, und der Wellenzahlabhängigkeit zusammen.

Es lassen sich für die Funktion $q(T, k)$ und somit auch für die Spur des Zeitentwicklungsoperators zwei Bereiche detektieren:

- **Gemischter Bereich:**

Hier liegt die Situation vor, dass $\omega(k)$ aus Gl. (5.2b) rein imaginär ist. Dann werden in Gl. (5.2a) die zugehörigen trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische Funktionen mit reellem Argument ersetzt. Wir erhalten diesen Fall i. A. durch Erhöhung der Anisotropie in x -Richtung, so dass $b > \alpha_k$ erfüllt sein muss. Da hierbei allerdings die Stabilität der stationären Lösung im ungetriebenen Falle aus Gl. (3.5a) verletzt ist, wird dieser Fall für die spätere Untersuchung keine entscheidende Rolle spielen.

- **Oszillatorischer Bereich:**

Wir betrachten hierbei die Situation, dass die Amplitude des statischen Feldes größer¹ ist als die Anisotropie in x -Richtung, d. h. es gilt nun $\alpha_k > b$. Somit bleiben in Gl. (5.2a) die trigonometrischen Funktionen mit den reellen Argumenten κ und $\omega(k)$ aus Gl. (5.2b) bestehen.

Diese Bereiche können wir, wie wir noch sehen werden, im Bifurkationsdiagramm unterscheiden. Wir wenden uns jetzt der Untersuchung der einzelnen Instabilitäten zu.

5.2 Hopf–Instabilität

Wie wir bereits im vorigen Kapitel gesehen haben, können wir die Bedingungsgleichungen für die Hopf–Instabilität aus Gl. (3.11a) explizit auswerten,

¹Einzig für $\alpha \gtrsim b$ gibt es einen ganz kleinen Bereich, in dem $\omega(k)$ aus Gl. (5.2b) imaginär ist: dieser Bereich wird in unseren Untersuchungen keine Rolle spielen und somit im Folgenden unterdrückt.

während die Bedingungsgleichungen für Flip- und Soft-mode-Instabilitäten für endliche Dämpfungen nur in impliziter Form vorliegen. Wir werden alle aus der nun folgenden Untersuchung resultierenden Linien in einem α, κ -Diagramm auftragen.

Wir betrachten die notwendige Bedingung für eine Hopf-Instabilität (3.11a) und die explizite Form der Determinante des Zeitevolutionsoperators (5.1). Auch hier geht, wie bei der Diskussion im vorigen Kapitel, die Wellenzahl k nur quadratisch in den Exponenten ein. Die kritische Wellenzahl q_c ist auch hier $q_c = 0$, da die Kickstärke κ positiv ist.

Aus Gl. (3.11a) folgt somit mit $q_c = 0$ direkt aus Gl. (5.1) für die Hopf-Bifurkationsbedingung, dass der Exponent verschwinden muss, d. h. es gilt (vergl. Gl. (4.1))

$$\kappa = \left(\alpha - \frac{b}{2}\right) T \quad (5.3)$$

Wir werden sehen, dass diese Bifurkationsbedingung im Falle endlicher Dämpfung eine Bifurkationslinie in einem α, κ -Diagramm beschreibt. Sie wird lediglich an jenen Stellen unterbrochen, wo die Bedingungsgleichung (3.11b) verletzt ist.

5.3 Bifurkationslinien für verschwindende Dämpfung

Wir wollen uns zunächst den Instabilitäten für den konservativen Fall, d. h. bei verschwindender Dämpfung ($\Gamma = 0$) zuwenden. In diesem Fall können keine Hopf-Instabilitäten auftreten, da die zugehörige Poincaré-Abbildung flächentreu ist. Dies wird auch anhand der Bifurkationsbedingungen (3.11b) und (3.11a) ersichtlich, die sich für $\Gamma = 0$ mit Hilfe von Gln. (5.1), (3.23a), (3.23b) und (5.2a) nicht erfüllen lassen. Allerdings ist es möglich, für verschwindende Dämpfung die Linien für Soft-mode- und Flip-Bifurkationen explizit in einem α, κ -Diagramm zu bestimmen.

Bei verschwindender Dämpfung können trotz Abwesenheit von Hopf-Instabilitäten noch die Bedingungen für die Soft-mode- und Flip-Bifurkation (vgl. Abschnitt 3.3.1) erfüllt werden. Wir diskutieren im Folgenden die sich aus Gl. (3.13b) und (3.13a) für feste Wellenzahl k ergebenden Bifurkationsbedingungen an die Parameter unter Zuhilfenahme der Gln. (5.1), (3.23a), (3.23b) und (5.2a). Da die Wellenzahl in diese Gleichungen nur in der Kombination $\alpha_k = H + a + Jk^2$ eingeht, genügt es, sich auf den Fall $k = 0$ zu konzentrieren und für endliche Wellenzahlen die Bifurkationsbedingungen durch eine Verschiebung im Parameter α anzupassen.

Wie wir bereits wissen, sind in Systemen, die sich analog zu Hamiltonschen Systemen verhalten, die Grenzen der Stabilität durch die Spur der Evolutionsmatrix gegeben. Entscheidend dabei ist, dass beim Wechsel der Stabilität der Betrag der Spur des Zeitevolutionsoperators den Wert 2 annimmt.

Übertragen auf unser System, taucht in Gl. (3.23a) für $\text{Sp}\underline{U}(T, k)$ neben dem Faktor 2 zusätzlich die Determinante des Zeitevolutionsoperators auf, die in Hamiltonschen Systemen aber den Wert 1 annimmt. Somit werden die Stabilitätsgrenzen einzig durch die Funktion $q(T, k)$ aus Gl. (5.2a) für den oszillatorischen Bereich bestimmt. Wie wir bereits gesehen haben, ist die stationäre Lösung im gemischten Bereich bereits instabil, so dass wir diesen Bereich hier nicht zu betrachten brauchen.

Die folgende Rechnung wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit für Wellenzahlen $k = 0$ durchgeführt, so dass wir diese Variable in den folgenden Rechnungen unterdrücken werden, da k in der Variablen α_k auftritt. Zuerst formen wir die Funktion $q(T, k = 0) = q(T)$ aus Gl. (5.2a) auf einen Ausdruck mit halben Winkeln um und erhalten

$$q(T) = 1 - \left(1 - \frac{Z}{N}\right) \sin^2\left(\frac{x_+}{2}\right) - \left(1 + \frac{Z}{N}\right) \sin^2\left(\frac{x_-}{2}\right) \quad (5.4a)$$

bzw.

$$q(T) = -1 + \left(1 - \frac{Z}{N}\right) \cos^2\left(\frac{x_+}{2}\right) + \left(1 + \frac{Z}{N}\right) \cos^2\left(\frac{x_-}{2}\right) \quad (5.4b)$$

mit (vergl. Gl. (4.3b) — (4.3e))

$$x_+ = \kappa + \omega^{(0)}T \quad (5.4c)$$

$$x_- = \kappa - \omega^{(0)}T \quad (5.4d)$$

$$Z = \alpha - \frac{b}{2} \quad (5.4e)$$

$$N = \omega^{(0)} = \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{b}{2})} \quad (5.4f)$$

sowie $\alpha = H + a$. Den allgemeinen Fall $k \neq 0$ erhalten wir dadurch, dass wir der k -Abhängigkeit durch die Ersetzung $\alpha \rightarrow \alpha_k$ Rechnung tragen. Durch diesen Schritt werden die Größen $x_+(k)$, $x_-(k)$, $Z(k)$ und $N(k)$ natürlich Funktionen der Wellenzahl.

Soft-mode-Bifurkationslinien (oszillatorischer Bereich)

An den Grenzen der Stabilität nimmt die Funktion $q(T)$ aus (5.4a) den Wert 1 an. Wir erhalten aus Gl. (5.4a) mit Gln. (5.4f), (5.4e)

$$\sin^2\left(\frac{x_-}{2}\right) = f^2(\alpha, b) \sin^2\left(\frac{x_+}{2}\right) \quad (5.5a)$$

$$f^2(\alpha, b) = \frac{N - Z}{Z + N} \quad (5.5b)$$

Ziehen wir nun die Wurzel in Gl. (5.5a), so müssen wir natürlich beide Lösungen berücksichtigen. Jede Lösung beschreibt eine Linie im Bifurkationsdiagramm. Unter Benutzung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen erhalten wir aus (5.5a) mit (5.5b)

$$\tan \frac{\kappa}{2} = \frac{1 + f(\alpha, b)}{1 - f(\alpha, b)} \tan \frac{\omega^{(0)}T}{2} \quad (5.6a)$$

und

$$\tan \frac{\kappa}{2} = \frac{1 - f(\alpha, b)}{1 + f(\alpha, b)} \tan \frac{\omega^{(0)}T}{2} \quad (5.6b)$$

mit $\omega^{(0)}$ aus Gl. (5.4f) und $f(\alpha, b)$ aus Gl. (5.5b).

Flip-Bifurkationslinien (oszillatorischer Bereich)

Hierbei nimmt die Funktion $q(T, k = 0)$ aus Gl. (5.4b) an den Grenzen der Stabilität den Wert -1 an. Wir erhalten dann aus Gl. (5.4b) mit (5.5b)

$$\cos^2\left(\frac{x_-}{2}\right) = f^2(\alpha, b) \cos^2\left(\frac{x_+}{2}\right) \quad (5.7)$$

Beim Ziehen der Wurzel müssen wir in Gl. (5.7) beide Lösungen berücksichtigen, die zwei Bifurkationslinien beschreiben. Unter Beachtung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen erhalten wir aus (5.7)

$$-\cot \frac{\kappa}{2} = \tan \frac{\kappa - \pi}{2} = \frac{1 + f(\alpha, b)}{1 - f(\alpha, b)} \tan \frac{\omega^{(0)}T}{2} \quad (5.8a)$$

und

$$-\cot \frac{\kappa}{2} = \tan \frac{\kappa - \pi}{2} = \frac{1 - f(\alpha, b)}{1 + f(\alpha, b)} \tan \frac{\omega^{(0)}T}{2} \quad (5.8b)$$

mit $\omega^{(0)}$ aus Gl. (5.4f) und $f(\alpha, b)$ aus Gl. (5.5b).

5.4 Das Bifurkationsdiagramm für verschwindende Dämpfung

Wir werden jetzt die berechneten Linien für Soft-mode-Bifurkationen aus Gln. (5.6a) und (5.6b) und die Linien für die Flip-Bifurkationen aus Gln. (5.8a) und (5.8b) in einem α, κ -Diagramm auftragen. In dem δ -gekickten System stehen uns neben den Anisotropien in z - und x -Richtung, a und b , die Stärke des Austausches J , die Periodendauer T des treibenden Feldes, die Amplitude H des statischen Feldes sowie anstelle der Amplitude h die Kickstärke κ zur Variation zur Verfügung. Auf den Einfluss der Dämpfung werden wir im nächsten Abschnitt eingehen. Auch hier treten einige Parameter in Kombination auf. Wir haben bereits in α_k die Anisotropie in z -Richtung, das statische Feld und die Stärke des Austausches zu einer effektiven Größe zusammengefasst. Zur freien Variation stehen uns somit die Anisotropie in x -Richtung, deren Stärke durch b charakterisiert wird, und die Periodendauer T zur Verfügung.

In Abb. 5.1 sind die Flip- und Soft-mode-Bifurkationslinien, die sich aus den Gln. (5.6a) und (5.6b) sowie Gln. (5.8a) und (5.8b) ergeben, für fest gewählte Parameterwerte von b und T dargestellt. Man erkennt eine wechselseitige Abfolge dieser Instabilitäten, die eine blasenförmige Textur zeigt, die sich aus der oszillatorischen Form der Linien ergibt. Da wir in Abb. 5.1 die Bifurkationslinien für $k = 0$ aufgetragen haben, ist die stationäre Lösung außerhalb dieser geschlossenen Gebiete gegenüber Störungen der Wellenzahl $k = 0$ stabil, während innerhalb dieser geschlossenen Gebiete Instabilität vorliegt.

Betrachten wir Störungen mit endlichen Wellenzahlen, so können wir das Diagramm in Abb. 5.1 ebenfalls verwenden. Wegen der Kopplung der Wellenzahl k an den Parameter α vermöge $\alpha_k = H + a + Jk^2$ müssen wir die Bifurkationslinien für endliche Wellenzahlen nach links verschieben.

Verändern wir den Parameter b , so vergrößern sich die Inselbereiche, d. h. die Instabilitätsbereiche dehnen sich aus. Wir können dies anhand des Vergleichs der Abb. 5.1 — 5.3 sehen, die für verschiedene Werte von b erstellt wurden. Verkleinern wir den Parameter b , so fallen für $b = 0$ die Linienpaare der Soft-mode- und Flip-Bifurkationen auf eine Linie zusammen. Eine Variation des zweiten Parameters, der Periodendauer T , bei endlichem, aber festem Wert von b besitzt aufgrund der Gln. (5.6a) und (5.6b) (ebenso Gl. (5.8a) und (5.8b)), durch die T an das b enthaltende $\omega^{(0)}$ gekoppelt ist, qualitativ die gleichen Auswirkungen wie die Variation von b .

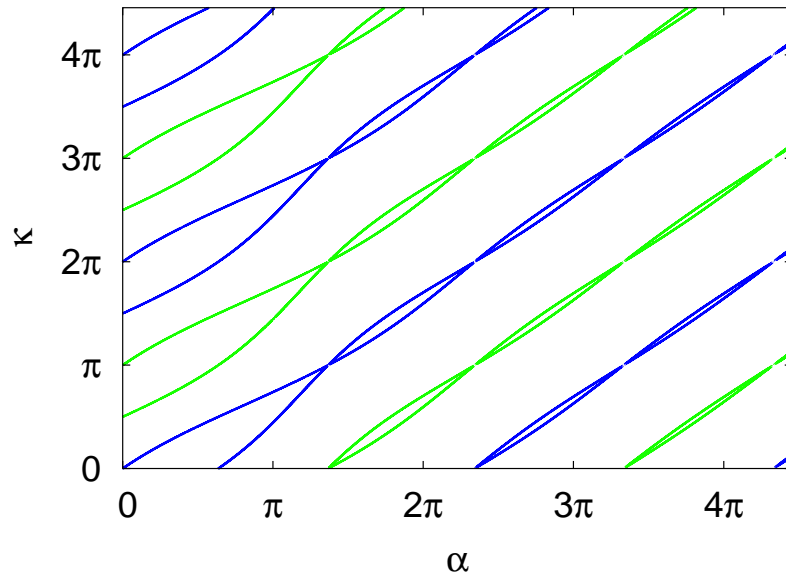


Abbildung 5.1: Bifurkationsdiagramm für $b = 2.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.0$, $k = 0$.
Blaue Linien: Soft-mode-Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten

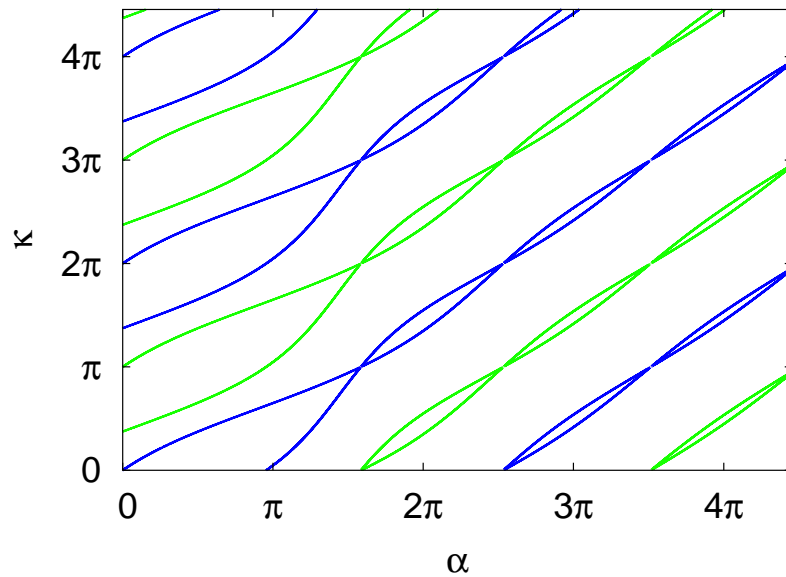


Abbildung 5.2: Bifurkationsdiagramm für $b = 3.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.0$, $k = 0$.
Blaue Linien: Soft-mode Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten

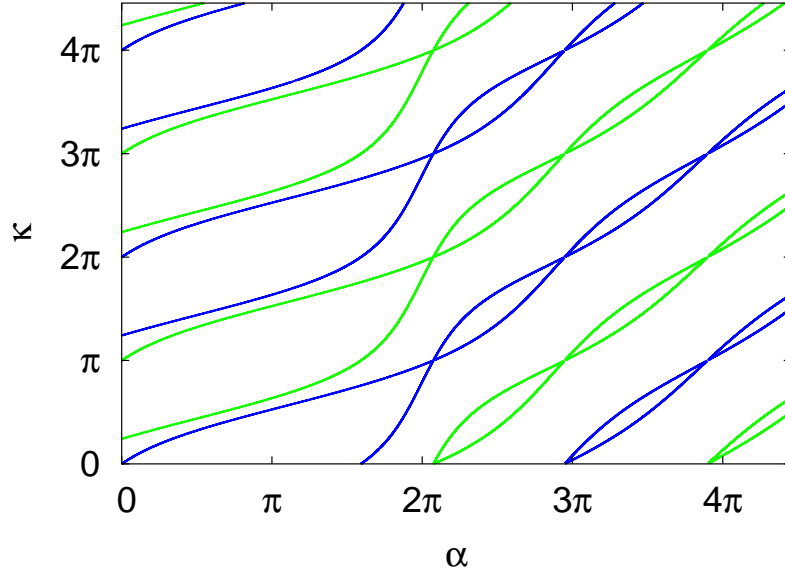


Abbildung 5.3: Bifurkationsdiagramm für $b = 5.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.0$, $k = 0$. Blaue Linien: Soft-mode-Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten

5.4.1 Periodizitäten

Bei Betrachtung des Bifurkationsdiagramms ist eine Periodizität in den Linien für Soft-mode- und Flip-Bifurkationen auffällig. Wir werden diese an Hand der Bifurkationslinien aus Gln. (5.6a) und (5.6b) für die Soft-mode- und Gln. (5.8a) und (5.8b) für die Flip-Bifurkation verifizieren.

Vertikale Richtung: Zuerst wenden wir uns einer Betrachtung der vertikalen Periodizität zu. Nehmen wir in Gl. (5.6a) die Ersetzung $\kappa \rightarrow \kappa + \pi$ vor, so geht wegen $\tan \frac{\kappa + \pi}{2} = -\cot \frac{\kappa}{2}$ diese Gleichung in Gl. (5.8a) über, d.h. eine Soft-mode-Bifurkationslinie geht beim vertikalen Verschieben deckungsgleich in eine Flip-Bifurkationslinie über. Verschieben wir die Linie nochmals zusätzlich um π in die gleiche Richtung, so geht diese Linie wieder deckungsgleich in eine Soft-mode-Bifurkationslinie über, da nun $\kappa \rightarrow \kappa + 2\pi$ gilt, und die linken Seiten von Gl. (5.6a) und Gl. (5.6b) 2π periodisch in κ sind.

Horizontale Richtung: Die Knoten, die zwei Bifurkationslinien bilden (s. Abb. 5.2), stellen die parametrischen Resonanzen dar. Sie liegen auf einer Horizontalen. Wir werden dies anhand der Soft-mode-Bifurkationslinien aus Gln. (5.6a) und (5.6b) zeigen. In einem Knoten treffen beide Linien aufeinander und es gilt daher $\tan \frac{\kappa}{2} \rightarrow \infty$. Da die Vorfaktoren auf den rechten Seiten der Gln. (5.6a) und (5.6b) beschränkt bleiben, muss $\tan \frac{\omega T}{2} \rightarrow \infty$ erfüllt sein. Dies ist dann der Fall, wenn die Argumente der trigonometrischen

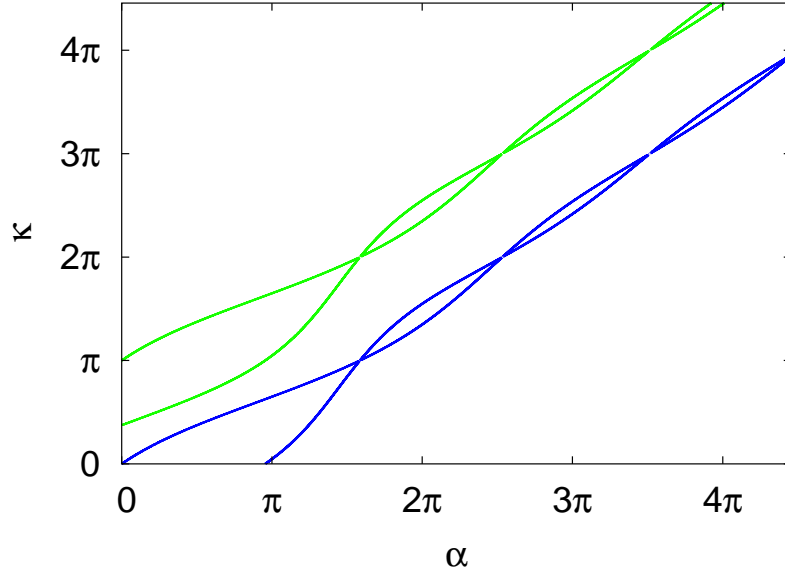


Abbildung 5.4: Reduziertes Bifurkationsdiagramm für $b = 3.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.0$, $k = 0$. Blaue Linien: Soft-mode-Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten

Funktionen ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$ sind. Für das Argument der tan-Funktion muss daher gelten:

$$(T\omega)^2 = (2n + 1)^2 \pi^2 \rightarrow \alpha = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{T}\right)^2} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (5.9)$$

So können wir anhand der Variation von n alle Werte von α ausfindig machen, an denen sich die Bifurkationslinien kreuzen und Knoten bilden. Wir erreichen somit alle parametrischen Resonanzen. Wegen des jeweils gleichen Funktionswertes κ aus Gl. (5.6a) und (5.6b) liegen all diese Knoten auf einer Linie

Mit dieser Kenntnis können wir uns im Bifurkationsdiagramm auf vier Linien beschränken: jeweils ein Paar von Soft-mode- und Flip-Bifurkationslinien. Das dadurch entstandene reduzierte Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 5.4 für einen Wert von b zu sehen.

Bei der Variation der Anisotropie in x -Richtung fällt weiterhin noch auf, dass für den Spezialfall $b = 0$ die beiden Soft-mode-Bifurkationslinien jeweils auf eine Linie zusammenfallen. Gleiches gilt für die Flip-Bifurkationslinien. Dies lässt sich an Hand von Gl. (5.6a) und Gl. (5.6b) leicht analytisch verifizieren. Für verschwindende Anisotropie gilt nach Gl. (5.5b) $f(\alpha, b = 0) = 0$, so dass trivialerweise die beiden Ausdrücke, Gl. (5.6a) und (5.6b), übereinstimmen

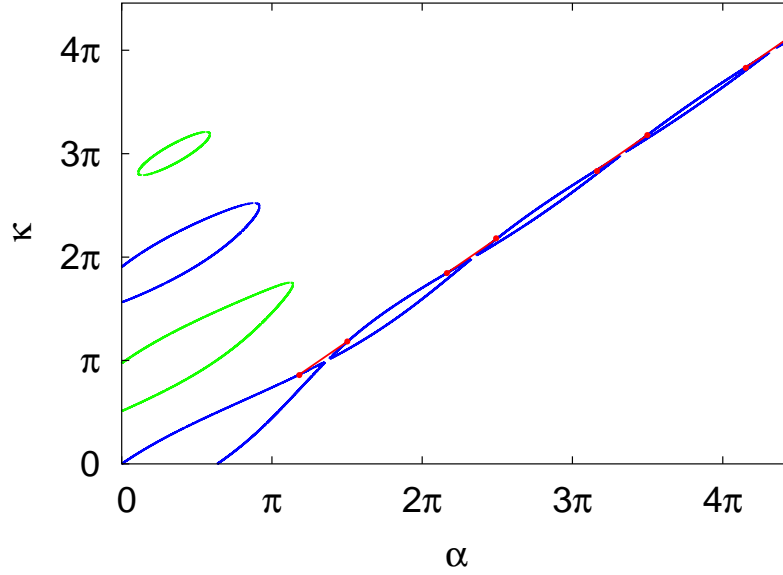


Abbildung 5.5: Bifurkationsdiagramm für $b = 2.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.1$, $k = 0$. Blaue Linien: Soft-mode-Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten, rote Linie: Hopf-Instabilität

und sich zu

$$\tan \frac{\kappa}{2} = \tan \frac{\alpha T}{2} \quad (5.10)$$

vereinfachen.

5.5 Das Bifurkationsdiagramm bei endlicher Dämpfung

Wir gehen jetzt zum Fall endlicher Dämpfung über. Hier treten alle drei Typen von Bifurkationen auf. Die Hopf-Bifurkationslinie liegt mit Gl. (5.3) explizit vor, während die Linien für Soft-mode- und Flip-Bifurkation in impliziter Form gegeben sind. Für die implizit vorliegenden Linien berücksichtigen wir Gl. (3.12b) und (3.13b) mit den entsprechenden Ausdrücken für die Determinante aus Gl. (5.1) sowie die Spur des Evolutionsoperators aus Gl. (3.23a) mit (5.2a) und (5.1).

Der Übersichtlichkeit halber haben wir hier wiederum nur die Linien für $k = 0$ aufgetragen. Wir sehen in Abb. 5.5, dass sich aufgrund der endlichen Dämpfung perlenartigen Gebiete voneinander ablösen und geschlossene

Bereiche bilden, die mit zunehmenden α kleiner werden und schließlich verschwinden. Wir werden im Abschnitt 5.6.1 das Ausbilden dieser geschlossenen Bereiche analytisch für Soft-mode- und Flip-Instabilitätslinien nachweisen. Neben den bereits bekannten Stabilitätsgebieten aus der Diskussion im vorigen Abschnitt, haben wir mit der Hopf Bifurkationslinie eine zusätzliche Stabilitätsgrenze erhalten. Rechts von dieser Linie ist die stationäre Lösung stabil.

Eine Ausweitung auf Störungen mit $k \neq 0$ bewirkt, dass sich die Linien in Abb. 5.6 wegen der α_k -Abhängigkeit nach links verschieben. Dies betrifft allerdings nur die Soft-mode- und Flip-Bifurkationslinien. Deren Einhüllende sind dann die Bifurkationslinien, die Störungen mit allen Wellenzahlen berücksichtigen. Wir werden in Abschnitt 5.6.2 explizit nachweisen, dass alle Kriterien einer Soft-mode-Bifurkation für die Einhüllende aller Soft-mode-Instabilitätslinien aus unserem Bifurkationsdiagramm (s. Abb. 5.5 — 5.7) erfüllt sind.

Wenn wir die Parameter α , b und T so gewählt haben, dass wir uns rechts von der Hopf-Bifurkationslinie der Abb. 5.5 befinden und dieser Punkt nicht von nach links verschobenen Flip- oder Soft-mode-Bifurkationslinien für nicht-verschwindende Wellenzahlen k überdeckt wird, so ist die stationäre Lösung bei eben dieser Wahl von Parametern gegenüber Störungen mit allen Wellenzahlen k stabil.

Wir betrachten Variationen der Parameter b für die Anisotropie in x -Richtung und Variation von T , d. h. Veränderungen der Periode des treibenden Feldes. Die restlichen Parameter werden in $\alpha_k = H + a + Jk^2$ zusammengefasst. Wie wir bereits in der vorangegangenen Diskussion gesehen haben, fallen die im ungedämpften Fall paarweise auftretenden Linien der Soft-mode- und Flip-Bifurkation für $b = 0$ auf einer Linie zusammen. Hier in diesem Diagramm Abb. 5.5 fallen die Inseln zu Linienstücken zusammen. So sorgt die endliche Dämpfung für die Existenz kleiner Abschnitte, in denen die Hopf-Bifurkationslinie von keiner weiteren Bifurkationslinie gestört wird.

Eine Erhöhung von b bewirkt eine Ausbuchtung der Inseln, wie wir es bereits im Abschnitt 5.4 für den dämpfungslosen Fall gesehen haben. Weiterhin erhalten wir wesentlich mehr Inseln (vgl. Abb. 5.7).

Die Variation der Periode des treibenden Feldes hat, wie wir bereits in Abschnitt 5.4 gesehen haben, qualitativ die gleichen Auswirkungen wie die Variation von b . Dieses Verhalten bleibt auch bei endlichen Dämpfungen erhalten.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Inselbildung im Falle endlicher Dämpfung mittels einer Störungstheorie nach kleinen Dämpfungen nachweisen. Zu-

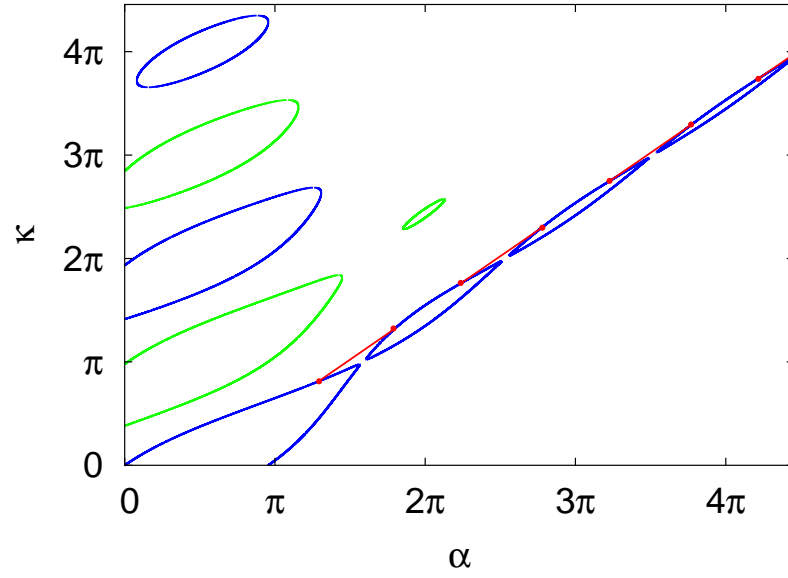


Abbildung 5.6: Bifurkationsdiagramm für $b = 3.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.1$, $k = 0$. Blaue Linien: Soft-mode-Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten, rote Linie: Hopf-Instabilität

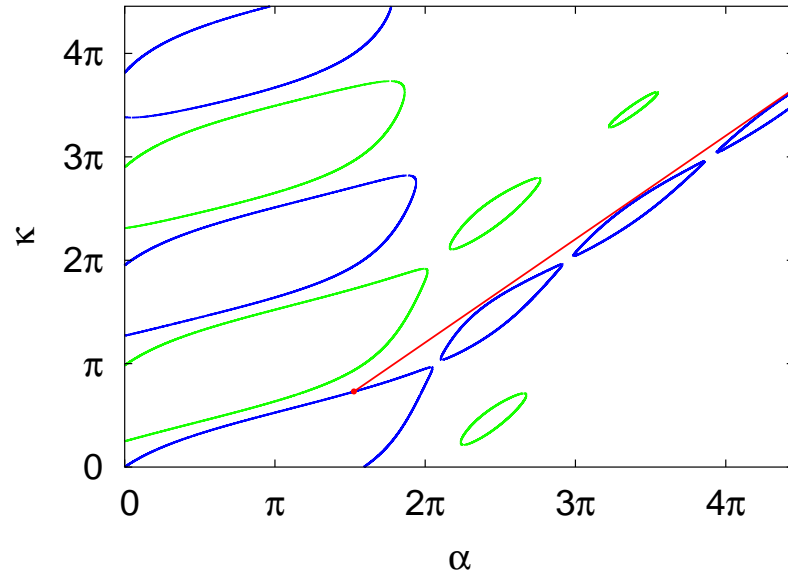


Abbildung 5.7: Bifurkationsdiagramm für $b = 5.0$, $T = 1.0$, $\Gamma = 0.1$, $k = 0$. Blaue Linien: Soft-mode-Instabilitäten, grüne Linien: Flip-Instabilitäten, rote Linie: Hopf-Instabilität

sätzlich wird gezeigt, dass die Kriterien einer Soft-mode-Bifurkationslinie für die Einhüllende der Soft-mode-Instabilitätslinien (z.B. aus Abb. 5.6) für alle Wellenzahlen k erfüllt werden.

5.6 Störungsentwicklung um Kreuzungspunkte

Ausgehend von der Berechnung der Instabilitätslinien in Abschnitt 5.3 werden wir uns in diesem Abschnitt dem Einfluss der Dämpfung auf die Kreuzungspunkte dieser Linien zuwenden. Dazu werden die Tangenten eines Liniengaars für $\Gamma = 0$ bestimmt. Diese bilden ein neues Koordinatensystem, in dem wir die Bifurkationslinien für endliche, aber kleine Dämpfung beschreiben werden.

5.6.1 Lineare Näherung um einen Kreuzungspunkt im dämpfungslosen Fall

Für den dämpfungslosen Fall haben wir mit den Gln. (5.6a), (5.6b) sowie (5.8a) und (5.8b) die Bifurkationslinien für $k = 0$ in Abschnitt 5.3 bestimmt. Wir werden im weiteren Verlauf dieses Abschnitts einen Kreuzungspunkt $P_{lk} = (\alpha_l, \kappa_k)$ von zwei sich kreuzenden Linien betrachten. Die Koordinaten dieses Punktes sind in Abschnitt 5.4.1 beschrieben. Sie lauten in allgemeiner Form (siehe Gl. 5.9)

$$\alpha_l = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2} \quad \text{für } l \in \mathbb{Z} \quad (5.11a)$$

$$\kappa_k = k\pi \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad . \quad (5.11b)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass k, l ungerade sind. Dann beschreiben die Gln. (5.11a) und (5.11b) die Koordinaten eines Schnittpunktes von zwei Soft-mode-Bifurkationslinien. Dann liefert die Linearisierung $\alpha = \alpha_l + \Delta\alpha$ und $\kappa = \kappa_k + \Delta\kappa$ von Gl. (5.6a) und (5.6b) mit (5.5b) um diesen Punkt folgende Gleichungen:

$$\Delta\kappa = T \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2}}{\frac{l\pi}{T}} \frac{1 + f(\alpha_l, b)}{1 - f(\alpha_l, b)} \Delta\alpha := m_+(l) \Delta\alpha \quad (5.12a)$$

$$\Delta\kappa = T \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2}}{\frac{l\pi}{T}} \frac{1 - f(\alpha_l, b)}{1 + f(\alpha_l, b)} \Delta\alpha := m_-(l) \Delta\alpha \quad (5.12b)$$

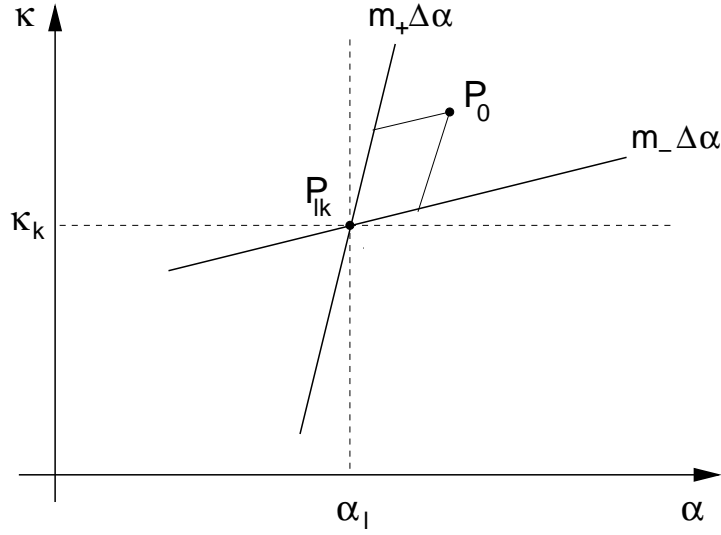


Abbildung 5.8: Tangenten der Bifurkationslinie im Kreuzungspunkt

Diese beiden Gleichungen beschreiben die beiden Tangenten sich kreuzender Bifurkationslinien im Kreuzungspunkt P_{lk} . In Abb. 5.8 sind diese Tangenten abgebildet. Für die jetzt folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, die Tangenten als neue Koordinatenachsen einzuführen. Dies wird erreicht durch die lineare Transformation

$$\Delta \kappa =: \Delta \kappa_+ + \Delta \kappa_- \quad (5.13a)$$

$$\Delta \alpha =: \frac{\Delta \kappa_+}{m_+} + \frac{\Delta \kappa_-}{m_-} \quad (5.13b)$$

mit m_{\pm} aus Gln. (5.12a) und (5.12b). Die Umkehrung lautet

$$\begin{aligned} \Delta \kappa_+ &= \frac{m_+}{m_+ - m_-} (\Delta \kappa - m_- \Delta \alpha) \\ \Delta \kappa_- &= \frac{m_-}{m_- - m_+} (\Delta \kappa - m_+ \Delta \alpha) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Grenzen der Stabilität, die für den Fall der Soft-mode-Bifurkation durch Gl. (5.6a) gegeben sind, werden in linearer Näherung in das neue Koordinatensystem auf dessen Koordinatenachsen $\Delta \kappa_+$ und $\Delta \kappa_-$ abgebildet. Wir sehen dies daran, dass wir aus Gl. (5.6a) mit Gl. (5.12a) und (5.12b) für kleine Abweichungen die quadratische Form

$$(\Delta \kappa - m_+ \Delta \alpha)(\Delta \kappa - m_- \Delta \alpha) = 0 \quad (5.15a)$$

erhalten, die sich mit Gl. (5.14) wie folgt schreiben lässt:

$$\left(1 - \frac{m_+}{m_-}\right) \left(1 - \frac{m_-}{m_+}\right) \Delta \kappa_+ \Delta \kappa_- = 0 \quad (5.15b)$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllbar, wenn entweder $\Delta\kappa_+$ oder $\Delta\kappa_-$ verschwindet. Wir werden jetzt die Bedingungsgleichung für die Soft-mode-Bifurkation aus Gl. (3.13b) in linearer Näherung um den Kreuzungspunkt P_{lk} für kleine, aber endliche Dämpfungen untersuchen.

Störungsentwicklung im Falle endlicher Dämpfung

Zur Betrachtung der Soft-mode-Instabilitätsgrenzen müssen wir uns der Analyse von Gl. (3.13b) im Falle kleiner Dämpfungen in der Nähe der ehemaligen Kreuzungspunkte P_{lk} zuwenden. Diese Gleichung lässt sich leicht in die unten angegebene Form (5.18) überführen.

Um dies zu verifizieren kann man z.B. ausgehend von der Eigenwertgleichung des Evolutionsoperators

$$\Lambda^2(k) - \text{Sp}\underline{\underline{U}}(T, k) \Lambda(k) + \det\underline{\underline{U}}(T, k) = 0 \quad (5.16)$$

die Eigenwerte, d.h. die Floquet-Multiplikatoren berechnen

$$\Lambda_{\pm}(k) = p(T, k) \left(q(T, k) \pm \sqrt{q^2(T, k) - 1} \right) \quad , \quad (5.17)$$

wobei wir von der speziellen Form von $\text{Sp}\underline{\underline{U}}(T, k)$ aus Gl. (3.23a) und der Relation $\det\underline{\underline{U}}(T, k) = p^2(k)$ Gebrauch gemacht haben. Mit der Wahl $\Lambda = 1$, die der Soft-mode-Instabilitätsbedingung entspricht folgt dann

$$q(T, k) = \frac{1}{2} \left(p(T, k) + \frac{1}{p(T, k)} \right) \quad . \quad (5.18)$$

Mit der speziellen Form von $p(T, k)$ aus Gl. (5.1) lautet dann die rechte Seite

$$\frac{1}{2} \left(p(T, k) + \frac{1}{p(T, k)} \right) = \cosh \left(\Gamma \left(\alpha_k - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right) \quad . \quad (5.19)$$

Wir haben weiterhin die allgemeine Form für $q(T, k)$ für endliche Dämpfungen aus Gl. (5.2a) mit (5.2b) gegeben². Gleichsetzen von (5.19) mit (5.2a) liefert

$$\cos \kappa \cos \omega(k) T + \frac{\alpha_k - \frac{b}{2}}{\omega(k)} \sin \kappa \sin \omega(k) = \cosh \left(\Gamma \left(\alpha_k - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right) T \quad . \quad (5.20)$$

Die Entwicklung von Gl. (5.20) nach kleinen Dämpfungen ergibt

$$0 = 1 - q^{(0)}(T, k) + \Gamma^2 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\alpha_k - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right)^2 - q^{(1)}(T, k) \right) \quad (5.21)$$

²Die Gleichungen sind wegen $\alpha_k = H + a + Jk^2$ auch für $k \neq 0$ gültig.

mit $q^{(0)}(T, k)$ aus Gl. (5.4a) und

$$q^{(1)}(T, k) = \frac{b^2}{8\omega^{(0)}} \left[\frac{\alpha_k - \frac{b}{2}}{\alpha_k(\alpha_k - b)} \sin \kappa \sin \omega^{(0)} T + T \left(\cos \kappa \sin \omega^{(0)} T - \frac{\alpha_k - \frac{b}{2}}{\sqrt{\alpha_k(\alpha_k - b)}} \sin \kappa \cos \omega^{(0)} T \right) \right] .$$

Die Gleichung (5.21) müssen wir im weiteren Verlauf in dieser Näherung um die alten Kreuzungspunkte in die neuen Koordinaten $\Delta\kappa_+$ und $\Delta\kappa_-$ transformieren. Dabei geht der dämpfungslose Anteil von Gl. (5.21) für kleine $\Delta\kappa_+$ und $\Delta\kappa_-$ in Gl. (5.15b) über. Den dämpfungsbehafteten Anteil aus Gl. (5.21) hingegen genügt es in nullter Ordnung in $\Delta\alpha$ und $\Delta\kappa$ bzw. in nullter Ordnung in $\Delta\kappa_+$ und $\Delta\kappa_-$ zu betrachten. Daher geht eben dieser Anteil als Konstante bezüglich $\Delta\kappa_+$ und $\Delta\kappa_-$ in die rechte Seite von Gl. (5.15b) ein.

Aus der exakten Bestimmungsgleichung (5.20) erhalten wir demnach für kleine Dämpfungen in der Nähe der Kreuzungspunkte P_{lk} für kleine Abweichungen in den neuen Koordinaten $\Delta\kappa_+$, $\Delta\kappa_-$ eine Hyperbelgleichung der Gestalt

$$\Delta\kappa_+ = \frac{C_{l,k}}{\Delta\kappa_-} \quad (5.22a)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{l,k} &= - \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{b}{2} \right) T - \kappa \right)^2 - q^{(1)} \right] \Big|_{\alpha=\alpha_l, \kappa=\kappa_k}}{\left(1 - \frac{m_+}{m_-} \right) \left(1 - \frac{m_-}{m_+} \right)} \Gamma^2 \\ &= \frac{\left(T \sqrt{\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T} \right)^2} - k\pi \right)^2}{2 \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T} \right)^2} \left(\frac{T}{l\pi} \right)^2 \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \\ &> 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.22b)$$

So wird verständlich, wie sich aus den sich kreuzenden Bifurkationslinien, die wir für den Fall $\Gamma = 0$ erhalten haben, für endliche Dämpfungen die Inseln abschnüren. Diese Inseln lassen sich in der Nähe der Kreuzungspunkte durch Gl. (5.22a) als Hyperbeln approximieren. Diese analytische Form aus (5.22a) mit (5.22b) wird uns in Abschnitt 5.6.2 bei der Diskussion des Soft-mode-Charakters von Nutzen sein.

Wir können dieses Ausbilden von Hyperbeln auch bei Flip-Bifurkationslinien bestimmen. Dazu benutzen wir das gleiche Verfahren, indem wir von einem

Kreuzungspunkt P_{lk} zweier sich schneidender Flip–Bifurkationslinien im Falle $\Gamma = 0$ ausgehen.

Hierbei gilt für die Kreuzungspunktkoordinaten aus Gln. (5.11a) und (5.11b), dass die Indices l und k gerade sind. Für die Linien im dämpfungslosen Fall aus (5.8a) und (5.8b) erhalten wir in linearer Näherung um den Kreuzungspunkt

$$\Delta\kappa = T \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2}}{\frac{l\pi}{\pi}} \frac{1 - f(\alpha_l, b)}{1 + f(\alpha_l, b)} \Delta\alpha := m_-(l) \Delta\alpha \quad (5.23a)$$

$$\Delta\kappa = T \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2}}{\frac{l\pi}{\pi}} \frac{1 + f(\alpha_l, b)}{1 - f(\alpha_l, b)} \Delta\alpha := m_+(l) \Delta\alpha \quad . \quad (5.23b)$$

Da die Struktur genau die Gleiche ist wie in Gln. (5.12a) und (5.12b), verläuft das weitere Vorgehen analog zu dem Fall der kreuzenden Soft–mode–Bifurkationslinien. Wir erhalten für den Fall zweier sich kreuzender Flip–Bifurkationslinien das Resultat, dass sich für endliche Dämpfungen die Kreuzungspunkte P_{lk} aufheben und die Kurven in dem neuen Koordinatensystem $\Delta\kappa_+$, $\Delta\kappa_-$ ebenfalls Hyperbeln beschreiben.

Im folgenden Unterabschnitt werden wir nachweisen, dass es sich bei den Bifurkationslinien der Diagramme 5.5 — 5.7, die sich als Einhüllende von Bifurkationslinien zu verschiedenen Wellenzahlen ergeben, tatsächlich um Soft–mode–Bifurkationslinien handelt.

5.6.2 Bedingungsgleichungen für Soft–mode–Instabilität in Hyperbelnäherung

Wie wir bereits bei der Diskussion der Bifurkationsdiagramme für endliche Dämpfungen in Abschnitt 5.5 gesehen haben, findet bei Variation der Wellenzahl k eine Verschiebung der dargestellten Soft–mode– und Flip–Bifurkationslinien (für $k = 0$) nach links statt. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Einhüllende aller verschobenen Soft–mode–Kurven eine echte Soft–mode–Bifurkationslinie ist. Dazu werden wir nachweisen, dass alle Punkte der Kurvenschar mit waagrechter Tangente die Bedingungsgleichungen erfüllen, die an eine Soft–mode–Bifurkation gestellt werden.

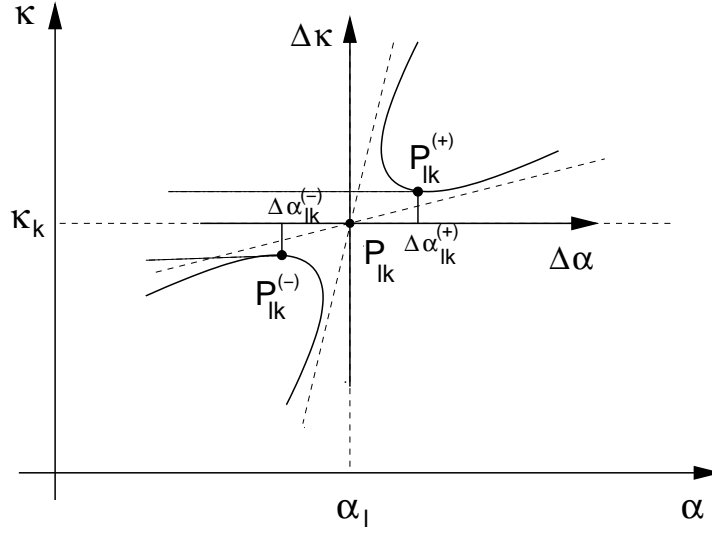


Abbildung 5.9: Berührungspunkte $P_{lk}^{(+)}$, $P_{lk}^{(-)}$ mit waagerechten Tangenten

In der Formulierung der Multiplikatoren lauten diese Bedingungsgleichungen

$$\Lambda(q_c) = 1 \quad (5.24a)$$

$$\left. \frac{\partial \Lambda(k)}{\partial k} \right|_{k=q_c} = 0 \quad (5.24b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Lambda(k)}{\partial k^2} \right|_{k=q_c} < 0 \quad . \quad (5.24c)$$

Die Gln. (5.24b) und (5.24c) garantieren, dass im Spektrum $\Lambda(k)$ bei der kritischen Wellenzahl $k = q_c$ ein Maximum vorliegt.

Wir betrachten im weiteren die Punkte $P_{lk}^{(+)}$, $P_{lk}^{(-)}$ mit waagerechter Tangente, wie sie in Abb. 5.9 dargestellt sind. In diesen Punkten ist durch die Bedingungsgleichung (3.13b) die erste Soft-mode-Bedingungsgleichung (5.24a) ohnehin erfüllt.

Bilden wir in den Punkten $P_{lk}^{(\pm)}$ das totale Differential von Λ und betrachten nun Variationen von α und κ , die längs der Linie $\Lambda = 1$ liegen, so gilt einerseits

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{\partial \Lambda}{\partial \kappa} d\kappa \quad . \quad (5.25)$$

Andererseits liegt in den Punkten $P_{lk}^{(+)}$, $P_{lk}^{(-)}$ jeweils eine waagerechte Tangente vor, d.h. es gilt

$$\frac{d\kappa}{d\alpha_k} = 0 \quad ,$$

so dass direkt aus Gl. (5.25) die Relation

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (5.26)$$

folgt. Da die Wellenzahl k über die Austauschwechselwirkung einzig in den Parameter $\alpha_k = H + a + Jk^2$ eingeht, können wir die Differentiation nach α in Gl. (5.26) in eine Differentiation nach k abwälzen³ und Gl. (5.26) impliziert

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial k} = 0 \quad (5.27)$$

Damit haben wir auch die Extremaleigenschaft des Spektrums $\Lambda(k)$ nach Gl. (5.24b) nachgewiesen. Wir wenden uns abschließend dem Nachweis der Eigenschaft aus (5.24c) zu, die für $k = q_c$ ein Maximum im Spektrum $\Lambda(k)$ beschreibt. Aus (5.25) erhalten wir

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_k} = - \frac{d\kappa}{d\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial \kappa} \quad (5.28)$$

Diese Gleichung differenzieren wir nochmals nach α und erhalten

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_k^2} = - \underbrace{\left(\frac{d\kappa}{d\alpha} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \kappa \partial \alpha} + \frac{d^2 \kappa}{d\alpha^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \kappa} \right)}_{=0} \quad (5.29)$$

Da wir die Untersuchung in den Punkten $P_{lk}^{(+)}$, $P_{lk}^{(-)}$ vornehmen, verschwindet wegen der anliegenden waagrechten Tangenten der erste Summand in Gl. (5.29). Beachten wir nun, dass wegen der Eigenschaft (5.26) auch die zweiten Ableitungen nach α bzw. k zueinander proportional sind, so folgt

$$\left. \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial k^2} \right|_{k=q_c} < 0 \quad , \text{ falls } \quad \left. \frac{d^2 \kappa}{d\alpha^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \kappa} \right|_{\alpha=\alpha_{\ell}^{(\pm)}(q_c)} > 0 \quad . \quad (5.30)$$

Aus der Darstellung der Bifurkationslinien aus Abb. 5.9 wird ersichtlich, dass für $P_{lk}^{(-)}$

$$\frac{d^2 \kappa}{d\alpha^2} < 0 \quad (5.31a)$$

³Entwicklung von $\Lambda(k)$ in eine Taylorreihe um k_c ergibt:

$$\begin{aligned} \Lambda(k) &= \Lambda(k_c) + \left(2Jk \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_k} \right) \Big|_{k=k_c} \Delta k + \left(J \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_k} + 2J^2 k^2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_k^2} \right) \Big|_{k=k_c} \frac{(\Delta k)^2}{2} + \dots \\ &= \Lambda(k_c) + \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial k} \right|_{k=k_c} \Delta k + \left. \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial k^2} \right|_{k=k_c} \frac{(\Delta k)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

und für $P_{lk}^{(+)}$

$$\frac{d^2 \kappa}{d\alpha^2} > 0 \quad (5.31b)$$

gilt. Wie wir an Hand von Gl. (5.30) sehen, besteht die zu lösende Aufgabe darin, $\partial\Lambda/\partial\kappa$ an der Stelle $\alpha = \alpha_l^{(\pm)}(k_c)$, d.h. an der Stelle des Berührungspunktes, zu bestimmen. Dann können wir mittels Gl. (5.30) Aussagen über die Gültigkeit der dritten Bedingungsgleichung (5.24c) treffen.

Berechnung der Berührungspunkte $P_{lk}^{(\pm)}$

Da wir kleine Dämpfungen betrachten und die Berührungspunkte $P_{lk}^{(\pm)}$ in der Nähe der Kreuzungspunkte P_{lk} liegen, dürfen wir die anstehende Berechnung der Berührungspunkte $P_{lk}^{(\pm)}$ in Hyperbelnäherung durchführen. Wir können uns damit der Ergebnisse des Abschnitts 5.6.1 bedienen.

Die zu betrachtende Bifurkationslinie haben wir in dem Koordinatensystem der anliegenden Tangenten $\Delta\kappa_+$ und $\Delta\kappa_-$ durch Gln. (5.22a) mit (5.22b) bestimmt. Die äquivalente Form erhalten wir mittels Rücktransformation aus Gl. (5.14) in das Koordinatensystem (κ, α) :

$$(\Delta\kappa - m_+ \Delta\alpha)(\Delta\kappa - m_- \Delta\alpha) + \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2} T - k\pi\right)^2}{2} \Gamma^2 = 0 \quad (5.32)$$

In den gesuchten Berührungspunkten $P_{lk}^{(\pm)}$ verschwinden die Steigungen, d.h. es gilt

$$\frac{d\Delta\kappa}{d\Delta\alpha} = 0 \quad .$$

Durch Differentiation nach $\Delta\alpha$ folgt somit aus Gl. (5.32)

$$(2\Delta\kappa - (m_+ + m_-)\Delta\alpha) \underbrace{\frac{d\Delta\kappa}{d\Delta\alpha}}_{=0 \text{ an } \alpha=\alpha_l^{(\pm)}(k_c)} + 2m_+m_- \Delta\alpha - (m_+ + m_-)\Delta\kappa = 0 \quad (5.33)$$

Damit können wir die Koordinaten des Berührungspunktes $P_{lk}^{(+)}$, $P_{lk}^{(-)}$ in dem Koordinatensystem $\Delta\alpha, \Delta\kappa$ folgendermaßen bestimmen. Zunächst liefert Gl. (5.33) eine Relation zwischen $\Delta\kappa$ und $\Delta\alpha$:

$$\Delta\kappa = 2 \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} \Delta\alpha = T \Delta\alpha \quad (5.34a)$$

Diese Relation (5.34a) kann als Tangentengleichung im Berührungspunkt aufgefasst werden. Setzen wir demnach (5.34a) in die Hyperbelgleichung (5.32)

ein, so erhalten wir

$$(\Delta\alpha)_{lk}^{(\pm)} = \pm \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{T}\right)^2} T - k\pi \right)^2}{\sqrt{(m_+ - T)(T - m_-)}} . \quad (5.34b)$$

Damit haben wir die Koordinaten der Berührungspunkte, d.h. der Punkte mit waagrechten Tangenten gefunden. Sie lauten

$$\kappa_{l,k}^{(\pm)} = \kappa_k + T (\Delta\alpha)_{l,k}^{(\pm)} = \kappa_k \pm T \left| (\Delta\alpha)_{l,k} \right| \quad (5.35a)$$

$$\alpha_{l,k}^{(\pm)} = \alpha_l + (\Delta\alpha)_{l,k}^{(\pm)} = \alpha_l \pm \left| (\Delta\alpha)_{l,k} \right| . \quad (5.35b)$$

Berechnung von $\partial\Lambda/\partial\kappa$ im Berührungspunkt

Bei der Berechnung gehen wir von der allgemeinen Form von $\Lambda(k)$ aus Gl. (5.17) aus. Differentiation nach κ liefert unter Ausnutzen der Relationen (5.19), (5.2a) und (5.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial\kappa} &= \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial\kappa} + \frac{1}{\sqrt{q^2 - 1}} \frac{\partial q}{\partial\kappa} \\ &= \Gamma + \frac{\cos \kappa \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + p \right) - \cos \omega T}{\sin \kappa \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + p \right)} . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Wir entwickeln in Gl. (5.36) alle auftretenden Terme um die Berührungspunkte $P_{lk}^{(+)}$, $P_{lk}^{(-)}$ (s. Anhang C) nach kleinen Dämpfungen. Wir erhalten aus (5.36) bis $\mathcal{O}(\Gamma^2)$

$$\left. \frac{\partial\Lambda}{\partial\kappa} \right|_{P_{l,k}^{(\pm)}} = \Gamma \pm \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{bT}{k\pi} \gtrless 0 \quad (5.37)$$

Falls der Index k nicht zu groß ist, gilt im Limes $\Gamma \rightarrow 0$

$$\left. \frac{d^2\kappa}{d\alpha^2} \frac{\partial\Lambda}{\partial\kappa} \right|_{P_{l,k}^{(\pm)}} > 0 \quad (5.38)$$

Wir können auf diese Weise die Bedingungsgleichung (5.24c) erfüllen. Die horizontalen Linien, die die Einhüllende aller Instabilitätslinien für $k \neq 0$ darstellt, ist eine echte Soft-mode Linie.

Im folgenden Abschnitt werden wir uns dem Verhalten oberhalb der Stabilitätsschwelle zuwenden.

Kapitel 6

Das Verhalten oberhalb der Schwelle

Im vorigen Kapitel haben wir das Bifurkationsverhalten des δ -gekickten Systems untersucht. Wir wenden uns in diesem Kapitel dem Verhalten dieses Systems knapp oberhalb der Hopf-Instabilität zu. In diesem Bereich können sich Strukturen ausbilden, deren räumliche und zeitliche Dynamik sich auf langsamen Zeit- und großen Ortsskalen abspielt. Wir betrachten in dem komplexen Bifurkationsszenario, welches wir im vorangegangenen Kapitel vorgestellt haben, einzig einen kleinen Ausschnitt der Hopf-Bifurkationslinie, wobei wir die Parameterwahl mit $\alpha > b$ festlegen, um zu gewährleisten, dass die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$ im ungetriebenen Fall stabil bleibt. Der Grund für die Beschränkung der Betrachtung einzig auf die Hopf-Bifurkationslinie liegt in der konkreten Themenstellung dieser Arbeit und wird im weiteren Verlauf noch näher erläutert werden.

Das Verhalten des Systems im schwach nichtlinearen Bereich können wir vermöge eines etablierten Verfahrens behandeln (s. z.B. [Mann], [Jual]), welches die langsamen Zeit- und die großen Ortsskalen berücksichtigt. Die daraus resultierende Gleichung beschreibt die Dynamik einer Einhüllenden, die Gleichung selbst wird Amplitudengleichung genannt. Im Gegensatz zu dem in der Literatur häufig betrachteten Fall autonomer Systeme sind nur sehr wenige Rechnungen zu explizit zeitabhängigen Modellen verfügbar. Deswegen werden wir zunächst die formale Herleitung der Amplitudengleichung für explizit zeitabhängige Systeme rekapitulieren.

6.1 Amplitudengleichungsformalismus

Aus der Taylor-Entwicklung um die stationäre Lösung $\phi_0 = 0$ erhalten wir für die komplexe Größe ϕ aus Gl. (2.6)

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & (i - \Gamma) [(H + a + h(t)) \phi - b \operatorname{Re} \phi - J \partial_{xx} \phi \\ & + b \operatorname{Re} \phi (|\phi|^2 + \phi^2) - 2a \phi |\phi|^2 + 2J \phi^* (\partial_x \phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^5)] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil nach Gl. (3.2) ergibt dann folgende translationsinvariante Gleichung, die wir im Weiteren knapp oberhalb der Schwelle untersuchen werden:

$$\partial_t \Phi = \mathcal{L}(t) \Phi + \mathcal{N}[\Phi] \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathbb{R}^2 \quad (6.2)$$

Dabei ist Φ eine reelle und in unserem Falle eine zweidimensionale Größe, die wir aus der komponentenweisen Zerlegung (3.2) der komplexen Größe ϕ der stereographischen Projektion (2.4) erhalten haben. Für den linearen Operator gilt: $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t + T)$, d.h. er besitzt die zeitliche Periodizität des treibenden Feldes. Mit der Abkürzung $\mathcal{N}[\Phi]$ sind die nichtlinearen Beiträge zur Bewegungsgleichung bezeichnet.

Die folgenden Überlegungen werden, um auch die algebraische Struktur möglichst beizubehalten, zunächst an Hand der allgemeinen Gleichung (6.2) durchgeführt. Die Spezialisierung auf unser zu untersuchendes System kann dann ohne Mühe später erfolgen.

Das Ziel unserer Überlegungen wird sein, mit Hilfe einer multiple scale Analyse eine Amplitudengleichung abzuleiten, die das Verhalten des Systems knapp oberhalb der Instabilitätsschwelle (in diesem Falle der Hopf-Instabilität) auf großen Längen- und Zeitskalen beschreibt. Die Parameterwerte, die die Instabilitätslinie kennzeichnen, werden wir speziell indizieren. Der kritischen Wert der Pumpstärke des treibenden Feldes wird mit κ_c bezeichnet. Die Werte für κ knapp oberhalb der Schwelle werden dann vermöge

$$\kappa = \kappa_c + \varepsilon^2 \delta \kappa \quad (6.3)$$

beschrieben. Wir haben in Gl. (6.3) einen Kleinheitsparameter ε eingeführt, der uns bei der Sortierung der einzelnen Ordnungen in der Störungsentwicklung gute Dienste leisten wird. Durch Variation der Systemparameter werden Abweichungen von der Schwelle erfasst. Dies bedeutet, dass der lineare Anteil in Gl. (6.2) vom Parameter ε abhängt. Diese Abhängigkeit lässt sich durch

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^{(0)}(t) + \varepsilon^2 \mathcal{L}^{(2)}(t) + \dots \quad (6.4)$$

beschreiben. Dabei liefert die Abweichung vom Schwellwert, die durch den Kleinheitsparameter ε beschrieben wird, den Entwicklungsparameter für unser Vorgehen.

Zentraler Ausgangspunkt für die Herleitung einer Amplitudengleichung ist das Eigenwertproblem des linearen Operators $\mathcal{L}^{(0)}(t)$ für die kritische Störwellenzahl q_c der wellenartigen Störung, bei der die stationäre Lösung instabil wird.

Da wir Translationsinvarianz vorausgesetzt haben, sind die zugehörigen Eigenfunktionen stets durch ebene Wellen der Form $\exp(ikx) \mathbf{u}_k^{(\nu)}(t)$ gegeben, wobei wegen des Floquet Theorems die Amplitudenfaktoren durch die Gleichung

$$\mu_k^{(\nu)} \mathbf{u}_k^{(\nu)}(t) + \dot{\mathbf{u}}_k^{(\nu)}(t) = \underline{\underline{L}}(t, k) \mathbf{u}_k^{(\nu)}(t) \quad (6.5)$$

bestimmt werden. Die Matrix $\underline{\underline{L}}(t, k)$ ergibt sich dabei durch Anwendung des linearen Operators $\mathcal{L}^{(0)}(t)$ auf den ebenen Wellenanteil, d.h. vereinfacht gesprochen dadurch, dass alle Ableitungen $\partial/\partial x$ im Operator durch Wellenzahlen ik ersetzt werden (vergl. Gl. (3.3)). $\mathbf{u}_k^{(\nu)}(t)$ bezeichnet also die explizit zeitabhängige Rechtseigenfunktion zu $\underline{\underline{L}}(t, k)$ und der Index ν einen Zweig der Eigenwerte. Sie besitzen die gleiche zeitliche Periodizität wie der lineare Operator, so dass gilt: $\mathbf{u}_k^{(\nu)}(T + t) = \mathbf{u}_k^{(\nu)}(t)$.

Für das adjungierte Eigenwertproblem ergibt sich analog zu Gl. (6.5) für den Linkseigenvektor die Beziehung

$$\mathbf{v}_k^{(\nu)*}(t) \mu_k^{(\nu)} - \dot{\mathbf{v}}_k^{(\nu)*}(t) = \mathbf{v}_k^{(\nu)*}(t) \underline{\underline{L}}(t, k) \quad (6.6)$$

Auch hier gilt, dass die Linkseigenvektoren $\mathbf{v}_k^{(\nu)}(t)$ die gleiche zeitliche Periodizität wie der lineare Operator besitzen, d.h. es gilt $\mathbf{v}_k^{(\nu)}(T + t) = \mathbf{v}_k^{(\nu)}(t)$. Wegen der T -Periodizität lässt sich darüberhinaus der Imaginärteil des Floquet-Exponenten auf den Bereich

$$\text{Im} \mu_k^{(\nu)} \in \left[\frac{-\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2} \right] \quad (6.7)$$

beschränken, wobei Ω durch die Periode T des treibenden Feldes vermöge $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ gegeben ist.

Da wir uns im Folgenden auf den Fall von Hopf-Instabilitäten konzentrieren wollen, sind folgende Bedingungen erfüllt:

- Es existiert ein kritischer Floquet-Exponent $\mu_{q_c}^{(\nu_c)} = \mu_c = i\omega_c$ mit verschwindendem Realteil, während für alle anderen Floquet-Exponenten $\text{Re} \mu_k^{(\nu)} < 0$ gelten muss.

- Für den kritischen Wellenvektor q_c soll der kritische Eigenwert ein Maximum im Spektrum aufweisen

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \mu_k}{\partial k} \Big|_{k=q_c} = 0 \quad . \quad (6.8)$$

- Für reelle Systeme gilt $\mu_k = \mu_{-k}^*$, so dass $-i\omega_c$ der kritische Exponent zum Wellenvektor $-q_c$ ist.

Bei der Betrachtung der nichtlinearen Beiträge beschränken wir uns auf den in unserem Beispiel vorliegenden Fall einer kubischen Nichtlinearität in niedrigster Ordnung

$$\mathcal{N}[\Phi] = \mathcal{N}_3[\Phi] + \dots \quad (6.9)$$

Wie wir bereits gesehen haben, wird an der Instabilitätsschwelle eine Mode der Form $\exp(i\omega_c t) \mathbf{u}_c(t)$ instabil, da im Falle der Hopf–Bifurkation $q_c = 0$ gilt. Der Einfachheit halber haben wir dabei den kritischen Eigenvektor mit $\mathbf{u}_c(t) = \mathbf{u}_{q_c=0}^{(\nu_c)}$ abgekürzt. Die bereits erwähnten Modulationen auf großen Orts– bzw. langsamen Zeitskalen werden durch folgenden Ansatz erfasst

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = & \varepsilon \left(A(\xi_1, \dots, \tau_1, \dots) e^{i\omega_c t} \mathbf{u}_c(t) + A^*(\xi_1, \dots, \tau_1, \dots) e^{-i\omega_c t} \mathbf{u}_c^*(t) \right) \\ & + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \varepsilon^3 \Phi^{(3)} + \dots \quad , \end{aligned} \quad (6.10)$$

der den Ausgangspunkt für die Störungsentwicklung darstellt. $A(\xi_i, \tau_i)$ ist dabei die Amplitude, die auf großen Zeit– und Ortsskalen variiert. Diese großen Skalen sind durch

$$\tau_i = \varepsilon^i t \quad \text{und} \quad \xi_i = \varepsilon^i x \quad (6.11)$$

mit $i \geq 1$ gegeben.

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (6.2) und Entwicklung nach Potenzen von ε erhalten wir eine Gleichungshierarchie für die höheren Ordnungen $\Phi^{(k)}$.

Wir werden die Störungsentwicklung nach einer endlichen Ordnung in ε (hier ε^3) abbrechen. Eine exakte Summation ist nicht möglich, deshalb heißt das Verfahren „schwach nichtlineare Analyse“. Wir müssen in jeder Ordnung ε^n ($n \leq 3$) berücksichtigen, dass keine in der Zeit anwachsenden Terme in den jeweiligen Partikulärlösungen auftreten, da diese nicht durch Terme höherer Ordnung in ε kompensiert werden können.

In jeder Ordnung von ε tritt dabei eine lineare, inhomogene Differentialgleichung für eine 2–komponentige Vektorfunktion $\Psi(x, t)$ von dem Typ

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \mathcal{L}^{(0)}(t) \Psi(x, t) + \sum_k \mathbf{w}_k(t) e^{ikx} \quad (6.12)$$

auf. Wie bereits erwähnt, hat der Operator $\mathcal{L}^{(0)}(t)$ eine marginal stabile Mode $q_c = 0$ mit zugehörigem kritischem Eigenwert $i\omega_c$ und Eigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ bzw. $\mathbf{v}_c(t)$. Alle anderen Moden mit $k \neq 0$ sind stabil. Die Inhomogenität setzt sich aus endlich vielen Fouriermoden zusammen ¹.

Ein gebräuchliches Verfahren zur Lösung von Gl. (6.12) ist die Fredholm–Alternative, die bei der Lösung von autonomen Differentialgleichungen benutzt wird. Da wir ein explizit zeitabhängiges Differentialgleichungssystem vorliegen haben, muss Klarheit über den Funktionenraum bestehen, aus dem die Lösung $\Psi(x, t)$ konstruiert wird. Es ist hingegen einfacher, sich der Vorgehensweise aus [Jual] zu bedienen, die sich für explizit zeitabhängige Systeme aus Gl. (6.12) anwenden lässt. Dabei wird zunächst Gl. (6.12) integriert und wir erhalten

$$\Psi(x, t) = B e^{i\omega_c t} \mathbf{u}_c(t) + \sum_k \int_0^t dt' \underline{\underline{U}}(t - t', k) \mathbf{w}_k(t') e^{ikx} + \dots \quad (6.13)$$

wobei $\underline{\underline{U}}(t, k)$ den zum Generator $\underline{\underline{L}}(t, k)$ gehörenden Zeitentwicklungsoperator bezeichnet, dessen spektrale Zerlegung sich mit Hilfe der Links- und Rechtseigenvektoren durch

$$\underline{\underline{U}}(t - t', k) = \sum_{\nu} \exp \left\{ \lambda_k^{(\nu)}(t - t') \right\} \frac{\left| \mathbf{u}_k^{(\nu)}(t) \right| \left(\mathbf{v}_k^{(\nu)}(t') \right)}{\left(\mathbf{v}_k^{(\nu)}(t) \right) \left| \mathbf{u}_k^{(\nu)}(t) \right|} \quad (6.14)$$

angeben lässt. Dabei haben wir uns der Einfachheit halber der Diracschen Schreibweise für Dyaden bedient. B bezeichnet die Integrationskonstante, ... beschreibt den zeitlich abfallenden Anteil der homogenen Gleichung, welcher zu den stabilen Eigenmoden gehört. Die in der Summe auftretenden Terme sind für $k \neq 0$ unkritisch, denn das Integral konvergiert im Limes großer Zeiten, da die zugehörigen Eigenwerte einen negativen Realteil besitzen. Für die Mode $k = q_c = 0$ greift dieses Argument nicht da die Eigenwerte nur zu oszillierendem Verhalten in $\underline{\underline{U}}(t, q_c)$ führen.

Zur Vermeidung von Säkulartermen, d.h. von Termen, die für $k = q_c = 0$ nach Gl. (6.13) in der Zeit anwachsende Beiträge liefern können, müssen wir fordern, dass

$$0 = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} dt' e^{-i\omega_c t'} \left(\mathbf{v}_c^{(\nu)}(t') \mid \mathbf{w}_{q_c}(t') \right) \quad (6.15)$$

¹Genau genommen werden bei einer Hopf–Bifurkation zwei Moden mit komplex konjugierten Eigenwerten $i\omega_c$ und $-i\omega_c$ instabil. Dies ändert aber nichts an der obigen Argumentation.

erfüllt ist. Die auftretenden Skalarprodukte sind die üblichen Skalarprodukte im \mathbb{C}^2 , wie sie z.B. aus der Quantentheorie bekannt sind.

Bei Behandlung der Säkularbedingung (6.15) schließen wir zunächst die starken Resonanzen aus. D. h. für den Imaginärteil des kritischen Floquet-Eigenwertes ω_c gilt:

$$\omega_c \neq \frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{3}, \frac{\Omega}{4} \quad (6.16)$$

Als Ergebnis erhalten wir in der dritten Ordnung in ε eine Gleichung für die Amplitude, die in der großen Klasse der komplexen Ginzburg–Landau–Gleichungen beheimatet ist [Jual]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_2} - v \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) A = \eta A + r |A|^2 A + D \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} \quad (6.17)$$

Die Koeffizienten ergeben sich zu

$$v = \text{Im} \left. \frac{d\mu^{(\nu_c)}(k)}{dk} \right|_{k=q_c=0} \quad (6.18a)$$

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{v}_c(t) | \mathcal{L}^{(2)}(t) | \mathbf{u}_c(t)) dt \quad (6.18b)$$

$$D = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \mu^{(\nu_c)}(k)}{dk^2} \right|_{k=q_c=0} \quad (6.18c)$$

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{v}_c(t) | \Delta(t)) dt \quad (6.18d)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{q_c=0}^{(\nu_c)}$ den Linkseigenvektor² von $\underline{\underline{L}}(t, q_c = 0)$ zum kritischen Eigenwert $i\omega_c$. Die Terme $\Delta(t)$ beschreiben die Terme mit kubischen Nichtlinearitäten, die wir, wie wir später sehen werden, speziell für unser System auf eine einfache Weise bestimmen können.

Der lineare Koeffizient η gibt den Abstand zur Schwelle an, während der diffusive Koeffizient D durch die Krümmung des Spektrums an der Stelle des kritischen Eigenwertes gegeben ist. Beide Größen lassen sich direkt aus dem linearen Operator bestimmen, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden. Der nichtlineare Koeffizient r beinhaltet alle resonanten Beiträge aus der Entwicklung um die stationäre Lösung in dritter Ordnung in ε . Der Bestimmung von r werden wir ebenfalls ein Unterkapitel widmen.

²Die Vektoren \mathbf{u}_c und \mathbf{v}_c sind auf 1 normiert

Die resultierende Amplitudengleichung (6.17) beschreibt die Dynamik knapp oberhalb der Schwelle. Sie gehört zur großen Klasse der komplexen Ginzburg–Landau–Gleichungen. Es sind zahlreiche Beiträge auch zu ihrem Lösungsverhalten erarbeitet worden, und es ist immer noch Gegenstand der aktuellen Forschung. Eine Übersicht über Arbeiten auf diesem Gebiet finden wir in [ArKr].

6.2 Berechnung der Koeffizienten der linearen Terme

Zuerst werden wir die Instabilitätsschwelle kennzeichnen und Angaben zum Kontrollparameter vornehmen. Daraufhin werden wir mit diesen Ergebnissen die Koeffizienten des linearen Anteils aus (6.17) bestimmen.

6.2.1 Die Schwelle

Wir betrachten dafür nochmals das komplizierte Bifurkationsdiagramm aus Abb. 5.6. Durch Änderung eines Kontrollparameters ist es möglich, vom stabilen zum instabilen Bereich zu gelangen. Wir können dies anschaulich durch die Variation der Kickstärke κ oder durch die Variation des statischen Feldes H , d.h. durch Variation von α erreichen. Wir werden im Folgenden die Änderung der Stärke des äußeren treibenden Feldes, d.h. der Kickstärke κ , betrachten.

Eine schematische Darstellung des Überschreitens der Hopf–Bifurkationslinie ist in Abb. 6.1 gegeben. Wir sehen ein Stück der Bifurkationslinie und die daran angrenzenden stabilen und instabilen Bereiche. Starten wir im stabilen Bereich (in Abb. 6.1 grau unterlegt), so erreichen wir durch Erhöhung der Kickstärke κ den instabilen Bereich (in Abb. 6.1 weiß unterlegt).

Wir können den kritischen Parameterwert κ_c durch den Wert von κ auf der Hopf–Bifurkationslinie festlegen. Den Kontrollparameter κ oberhalb dieser Bifurkationslinie können wir nach Gl. (6.3) nach Abweichungen vom kritischen Wert entwickeln.

6.2.2 Ableitungsrelationen

Für die Berechnungen der Koeffizienten η , D und v werden, wie wir noch sehen werden, Ableitungen des linearen Operators bzw. Eigenschaften des

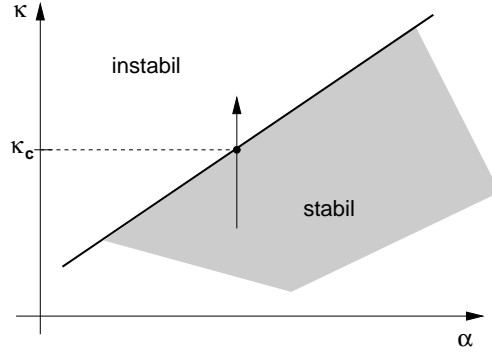


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Überschreitens der Hopf-Bifurkationslinie

Spektrums benötigt. Wie wir in Abschnitt 5.6.1 in Gl. (5.17) gesehen haben, können wir die Floquet-Multiplikatoren $\Lambda(T, k)$, die in zweidimensionalen Systemen eindeutig durch $\det \underline{U}(T, k)$ und $\text{Sp} \underline{U}(T, k)$ festgelegt sind, durch die Funktionen $p(T, k)$ aus Gln. (3.23b) mit (5.1) und $q(T, k)$ aus Gln. (5.2a) mit (5.2b) bestimmen. Wir werden demnach die Kenntnisse über die Floquet-Exponenten $\mu(k)$ auf entsprechende Eigenschaften der Floquet-Multiplikatoren, bzw. der bereits bestimmten Funktionen $q(T, k)$ und $p(T, k)$ übertragen.

Wir wenden uns zunächst den Ableitungen des Floquet-Exponenten $\mu(k)$ nach einem allgemeinen Parameter l zu. Die sich daraus ergebenden Ableitungsrelationen werden wir für die Floquet-Multiplikatoren $\Lambda(T, k)$ übertragen und letztendlich durch die Funktionen $q(T, k)$ und $p(T, k)$ ausdrücken.

Ausgangspunkt ist die Beziehung zwischen $\Lambda(T, k)$ und $\mu(k)$, wie sie in der aus dem Floquet-Theorem resultierenden Bestimmungsgleichung für $\underline{U}(T, k)$ aus Gl. (3.8) gegeben ist. Daraus ergibt sich direkt folgende Gleichung für die zugehörigen Eigenwerte:

$$\Lambda(T, k) = e^{\mu(k)T} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(k) = \frac{1}{T} \ln \Lambda(T, k) \quad (6.19)$$

Auf diese Weise ist der für die Berechnung der Koeffizienten v und D auftretende Floquet-Exponent $\mu(k)$ mit dem Multiplikator $\Lambda(T, k)$ verbunden.

Weiterhin haben wir mit Gl. (5.17) die Beziehung zwischen den Multiplikatoren Λ und den Funktionen $q(T, k)$ und $p(T, k)$ beschrieben. Da wir das System an der Hopf-Bifurkationslinie betrachten, sehen wir, dass wir durch Einsetzen der Bedingungsgleichung (3.10a) in Gl. (3.10b) die Bedingung $|q(T, k)| \leq 1$ erhalten. Diese Beschränktheit in $q(T, k)$ können wir somit als Ausgangs-

punkt für die folgende Transformation nehmen:

$$q(T, k) =: \cos \varphi(T, k) \quad (6.20)$$

Aus Gl. (6.19) folgt mit Gl. (5.17) für einen Floquet-Exponenten

$$\mu(k) T = \ln p(T, k) + i \varphi(T, k) \quad . \quad (6.21)$$

Differentiation von μ in Gl. (6.21) nach dem allgemeinen Parameter l und Rücktransformation auf die Funktionen $p(T, k)$ und $q(T, k)$ ergibt

$$\frac{d\operatorname{Re}\mu(k)}{dl} = \frac{1}{T} \frac{p'(T, k)}{p(T, k)} \quad (6.22a)$$

$$\frac{d\operatorname{Im}\mu(k)}{dl} = -\frac{1}{T} \frac{q'(T, k)}{\sqrt{1 - q^2(T, k)}} \quad . \quad (6.22b)$$

Hierbei bezeichnet $p'(T, k)$ die Ableitung nach dem Parameter l , für die Funktion $q(T, k)$ entsprechend. Für die zweiten Ableitungen erhalten wir

$$\frac{d^2\operatorname{Re}\mu(k)}{dl^2} = \frac{1}{T} \left(\frac{p''(T, k)}{p(T, k)} - \frac{p'^2(T, k)}{p^2(T, k)} \right) \quad (6.23a)$$

$$\frac{d^2\operatorname{Im}\mu(k)}{dl^2} = -\frac{1}{T} \left(\frac{q''(T, k)}{\sqrt{1 - q^2(T, k)}} + \frac{q(T, k) q'(T, k)}{\sqrt{1 - q^2(T, k)}^3} \right) \quad . \quad (6.23b)$$

6.2.3 Konvektiver Koeffizient v

In den Beziehungen $\operatorname{Sp}\underline{U}(T, k)$ aus Gl. (3.23c) mit (5.2a) und (5.2b) sowie in $\det\underline{U}(T, k)$ aus Gl. (5.1) taucht die Wellenzahl k immer nur quadratisch auf. Da wir die Untersuchungen an der Hopf-Bifurkationslinie vornehmen, gilt dort stets $k = q_c = 0$, so dass in v alle ersten Ableitungen nach k an der Stelle der kritischen Wellenzahl nach Gl. (6.22a) und (6.22b) verschwinden, und aus (6.18a) folgt

$$v = 0 \quad . \quad (6.24)$$

6.2.4 Linearer Koeffizient η

Bei der Bestimmung des linearen Koeffizienten η tritt in der Bestimmungsgleichung (6.18b) der lineare Operator $\mathcal{L}^{(2)}(t)$ auf. Dieser definiert den Abstand zur Schwelle. Wir haben die Schwelle κ_c bestimmt. Wie wir in Anhang D sehen, können wir in der Nähe der Schwelle den linearen Operator in eine

Taylor-Reihe nach dem Parameter ε entwickeln $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathcal{L}^{(0)'} \delta\kappa$. Wir sehen somit, dass sich der benötigte lineare Operator $\mathcal{L}^{(2)}(t)$ als Ableitung von $\mathcal{L}^{(0)}(t)$ multipliziert mit dem Abstand zur Schwelle schreiben lässt. Somit entspricht der lineare Koeffizient nach Gl. (6.18b) wegen des darin auftretenden Skalarprodukts gerade der Ableitung des kritischen Eigenwertes $\mu(q_c)$ nach κ an der Stelle κ_c multipliziert mit $\delta\kappa$.

Für das δ -gekickte System bestimmen wir den linearen Koeffizienten. Dazu identifizieren wir κ als den für die nötigen Ableitungsrelationen aus (6.22a) und (6.22b) benötigten Parameter. Die zusätzlich benötigte Funktion $q(T, k)$ entnehmen wir Gl. (5.2a) und die Funktion $p(T, k)$ implizit durch Gl. (5.1). Durch Einsetzen dieser Funktionen in (6.22b) und (6.22a) und Differentiation nach κ erhalten wir

$$\frac{dp(T, k)}{d\kappa} = \Gamma e^{-\Gamma((\alpha_k - \frac{b}{2})T - \kappa)} \quad (6.25a)$$

$$\frac{dq(T, k)}{d\kappa} = -\sin \kappa \cos(\omega(k)T) - \frac{\alpha_k - \frac{b}{2}}{\omega(k)} \cos \kappa \sin(\omega(k)T) \quad . \quad (6.25b)$$

Wir müssen zusätzlich die Hopf-Bedingungsgleichung (5.3) berücksichtigen. Dabei wird $\omega(k = q_c = 0) = \omega(q_c)$ aus Gl. (5.2b) mit der Bedingung für die Hopf-Bifurkation aus Gl. (5.3) zu $\bar{\omega}_c^2 := \omega^2(q_c)T^2 = \kappa_c^2 - (\Gamma^2 + 1)(\frac{b}{2}T)^2$. Somit erhalten wir für den linearen Koeffizienten mit Gl. (6.22a) und (6.22b)

$$\text{Re}\eta = \left. \frac{d\text{Re}\mu(q_c)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_c} \delta\kappa = \frac{\Gamma}{T} \delta\kappa \quad (6.26a)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\eta &= \left. \frac{d\text{Im}\mu(q_c)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_c} \delta\kappa \\ &= \frac{1}{T} \frac{\sin \kappa_c \cos \bar{\omega}_c - \frac{\kappa_c}{\bar{\omega}_c} \cos \kappa_c \sin \bar{\omega}_c}{\sqrt{1 - \left(\cos \bar{\omega}_c \sin \kappa_c + \frac{\kappa_c}{\bar{\omega}_c} \sin \bar{\omega}_c \sin \kappa_c \right)^2}} \delta\kappa \quad . \end{aligned} \quad (6.26b)$$

6.2.5 Diffusiver Koeffizient D

Zur Berechnung des diffusiven Koeffizienten D ist es nach Gl. (6.18c) nötig, die zweite Ableitung des Floquet-Exponenten nach der Wellenzahl k an der kritischen Wellenzahl q_c zu bilden. Dazu berücksichtigen wir die Ableitungsrelationen Gl. (6.23a) und Gl. (6.23b). Die Funktion $q(T, k)$ ist für das δ -gekickte System durch Gl. (5.2a) gegeben und die Funktion $p(T, k)$ ist implizit in Gl. (5.1) enthalten. Darüberhinaus ist zu berücksichtigen, dass die kritische Wellenzahl $q_c = 0$ ist. Zusätzlich ist die Bedingung an die Hopf-Bifurkation (5.3) zu beachten.

Zuerst bestimmen wir die Ableitung nach der Wellenzahl k an der Stelle $k = q_c = 0$ und erhalten aus Gl. (6.23a) und (6.23b)

$$\left. \frac{d^2 p(T, k)}{dk^2} \right|_{k=0} = 2J\Gamma T e^{-\Gamma((\alpha_0 - \frac{b}{2})T - \kappa)} \quad (6.27a)$$

$$\left. \frac{d^2 q(T, k)}{dk^2} \right|_{k=0} = -2J \left[\frac{\alpha_0 - \frac{b}{2}}{\omega_0} \cos \kappa \sin(\omega_0 T) - \frac{(\Gamma^2 + 1)(\frac{b}{2})^2}{\omega_0^3} \sin \kappa \sin(\omega_0 T) - \frac{(\alpha_0 - \frac{b}{2})^2}{\omega_0^2} \sin \kappa \cos(\omega_0 T) \right] \quad (6.27b)$$

mit $\omega_0^2 = \alpha_0(\alpha_0 - b) - \Gamma^2(\frac{b}{2})^2$. Durch anschließendes Einsetzen der Hopf-Bedingung (5.3) erhalten wir aus der Bestimmungsgleichung (6.18c) mit der Abkürzung $\bar{\omega}_c^2 = \kappa_c^2 - (\Gamma^2 + 1)(\frac{b}{2}T)^2$

$$\text{Re} D = -\Gamma J \quad (6.28a)$$

$$\text{Im} D = J \left[\frac{\kappa_c}{\bar{\omega}_c} \cos \kappa_c \sin \bar{\omega}_c + \frac{(\Gamma^2 + 1)(\frac{b}{2})^2 T^3}{\bar{\omega}_c^3} \sin \kappa_c \sin \bar{\omega}_c - \left(\frac{\kappa_c}{\bar{\omega}_c} \right)^2 \sin \kappa_c \cos \bar{\omega}_c \right] . \quad (6.28b)$$

6.3 Der nichtlineare Koeffizient r

Zur Bestimmung des nichtlinearen Koeffizienten müssen wir die explizit zeitabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ bzw. $\mathbf{v}_c(t)$ des linearen Operators an der Instabilitätsschwelle bestimmen. Diese sind durch das Eigenwertproblem (6.5) bzw. (6.6) festgelegt, wenn die Wellenzahl $k = q_c = 0$ und der Floquet-Exponent $\mu_k^{(\nu)} = i\omega_c$ auf ihre kritischen Werte fixiert werden. Wir benötigen die Eigenvektoren, um nach Gl. (6.18d) das Skalarprodukt mit allen kubischen Nichtlinearitäten bilden zu können. Die Bestimmung der Eigenvektoren ist in der Tat der technisch aufwendigere Teil der folgenden Analyse.

Wir werden daher diese nicht direkt am δ -gekickten System durchführen, sondern wir gehen einen Schritt zurück und gehen bei der Analyse von dem stückweise konstant treibenden Feldes aus, wie wir es in Kapitel 4 bereits untersucht haben. Dabei gewährleisten wir durch die entsprechende Wahl der auftretenden Parameter, dass eine Hopf-Instabilität vorliegt. Anhand dieses Systems werden wir die explizit zeitabhängigen Rechts- und Linkseigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ und $\mathbf{v}_c(t)$ des linearisierten Problems aus Gl. (6.5) und (6.6) bestimmen.

Dabei gelingt es uns, nach Zerlegung des linearen Operators in einen spurlosen Anteil und einen Rest, das gedämpfte System auf das aus der Quantenmechanik bekannte Kronig–Penney–Modell [BBCK] abzubilden und auf diese Weise die explizite Form der Eigenmoden zu bestimmen. Da sich der Koeffizient r aus Gl. (6.18d) über ein basisunabhängiges Skalarprodukt mit den kubischen Nichtlinearitäten berechnet, werden wir die Auswertung in einem für die Bestimmung der Eigenvektoren geeigneten Koordinatensystem vornehmen. Nach Ausführung des Skalarprodukts und Integration über eine Periode des äußeren treibendes Feldes werden wir den Übergang zum δ -gekickten Fall analog zur Vorgehensweise aus Kapitel 5 durchführen.

6.3.1 Zur Berechnung der explizit zeitabhängigen Eigenvektoren

Zunächst wenden wir uns dem linearisierten Problem aus Gl. (3.3) zu. Wir werden es in Analogie zu dem wohlbekannten Kronig–Penney–Modell setzen, um dessen Lösungseigenschaften wiederum auf unser System anzuwenden. Zuerst werden wir den linearen Operator in eine geeignete Form bringen.

Zerlegung des linearen Operators

Wir betrachten zunächst das linearisierte Problem aus Gl. (3.3) mit dem linearen Operator aus Gl. (3.4a) — (3.4c) für $k = 0$. Wir zerlegen den linearen Operator in einen spurlosen Anteil und einen Rest. So erhalten wir für die in den beiden Zeitintervallen gültigen linearen Operatoren

$$\underline{\underline{L}}_0 + \underline{\underline{L}}_1 = -\Gamma \left(\alpha - \frac{b}{2} - h \right) \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tilde{L}}}_1 \quad \text{für } 0 < t \leq t_1 \quad (6.29a)$$

$$\underline{\underline{L}}_0 = -\Gamma \left(\alpha - \frac{b}{2} \right) \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tilde{L}}}_2 \quad \text{für } t_1 < t \leq T \quad (6.29b)$$

mit

$$\underline{\underline{\tilde{L}}}_1 = \begin{pmatrix} -\Gamma \frac{b}{2} & -(\alpha - h) \\ \alpha - b - h & \Gamma \frac{b}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\tilde{L}}}_2 = \begin{pmatrix} -\Gamma \frac{b}{2} & -\alpha \\ \alpha - b & \Gamma \frac{b}{2} \end{pmatrix} \quad (6.29c)$$

Wie wir anhand von Gl. (6.29c) schnell sehen, haben die Anteile $\underline{\underline{\tilde{L}}}_i$ folgende Eigenschaft:

$$\text{Sp} \underline{\underline{\tilde{L}}}_i = 0 \quad (6.30a)$$

d.h.

$$\underline{\underline{\tilde{L}}}_1^2 = -\omega_1^2 \underline{\underline{1}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\tilde{L}}}_2^2 = -\omega^2 \underline{\underline{1}} \quad (6.30b)$$

mit ω_1 aus (3.23d) und ω aus (5.2b) jeweils für $k = 0$. Diese Eigenschaft aus Gl. (6.30b) wird von entscheidender Bedeutung bei der Berechnung der Eigenvektoren sein.

Aus dem linearisierten Problem (3.3) erhalten wir die Lösung $\Phi(t)$, wobei wir uns im folgenden ausschließlich auf den Fall der kritischen Wellenzahl $k = q_c = 0$ beschränken und daher im weiteren Verlauf auf eine explizite Angabe der Wellenzahl verzichten. Wir werden in der Lösung $\Phi(t)$ durch Abspaltung des dämpfungsbehafteten Anteils eine neue Größe $\tilde{\Phi}(t)$ einführen, die die durch den spurlosen Anteil des linearen Operators $\underline{\tilde{L}}_i$ hervorgerufene Dynamik beschreibt. Wir definieren

$$\Phi(t) = \begin{cases} e^{-\Gamma(\alpha - \frac{b}{2} - h)t} \tilde{\Phi}(t) & \text{für } 0 < t \leq t_1 \\ e^{-\Gamma((\alpha - \frac{b}{2} - h)t_1 + (\alpha - \frac{b}{2})(t - t_1))} \tilde{\Phi}(t) & \text{für } t_1 < t \leq T \end{cases} \quad (6.31)$$

Im weiteren Verlauf werden die Stetigkeitsbedingungen, die an die neue Größe $\tilde{\Phi}(t)$ auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit von $\Phi(t)$ zu stellen sind, eine wichtige Rolle spielen. Für den Anteil $\tilde{\Phi}$ erhalten wir zunächst die Bewegungsgleichung

$$\dot{\tilde{\Phi}}(t) = \begin{cases} \underline{\tilde{L}}_1 \tilde{\Phi}(t) & \text{für } 0 < t \leq t_1 \\ \underline{\tilde{L}}_2 \tilde{\Phi}(t) & \text{für } t_1 < t \leq T \end{cases} \quad (6.32)$$

Wegen der Eigenschaft der spurlosen Operatoren $\underline{\tilde{L}}_i$ aus Gl. (6.30b) folgt durch eine weitere Differentiation für $\tilde{\Phi}(t)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\Phi}}(t) + \omega_1^2 \tilde{\Phi}(t) &= 0 \quad \text{für } t \in [0, t_1] \\ \ddot{\tilde{\Phi}}(t) + \omega^2 \tilde{\Phi}(t) &= 0 \quad \text{für } t \in [t_1, T] \end{aligned} \quad (6.33)$$

mit ω_1 aus (3.23d) und ω aus (3.23e) jeweils für $k = 0$. Während in Gl. (6.32) die Komponenten des Vektors $\Phi(t)$ miteinander gekoppelt sind, sind sie in Gl. (6.33) entkoppelt. Wir können Gl. (6.33) als stationäre Schrödingergleichung eines Teilchens interpretieren. Dies wollen wir im folgenden Unterabschnitt betrachten.

Analogie zum Kronig–Penney–Modell

Interpretieren wir $\tilde{\Phi}(x)$ aus Gl. (6.33) als zweikomponentige Wellenfunktion eines Teilchens, so bewegt es sich in einem periodischen Kastenpotential (s. Abb. 6.2). Für die nun folgende Betrachtung ist es nötig, dass wir die Zeit

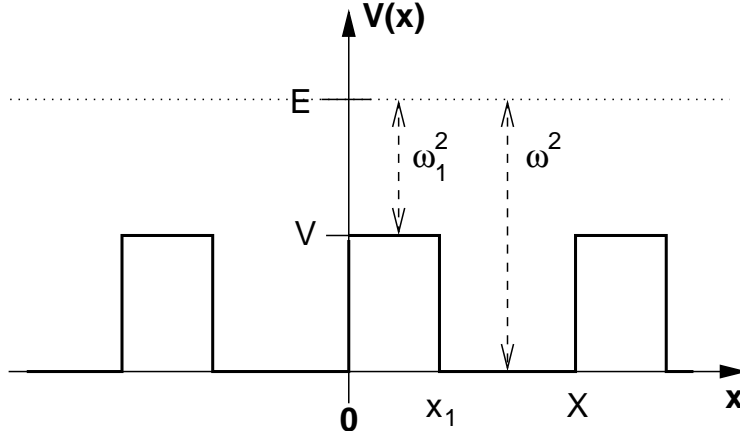


Abbildung 6.2: Potentialverlauf im Kronig–Penney–Modell

t als die in dem quantenmechanischen Modell enthaltene Raumkoordinate x auffassen. Denn aus

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \tilde{\Phi}(x)}{dx^2} + [V(x) - E] \tilde{\Phi}(x) = 0 \quad (6.34)$$

folgt mit

$$V(x) = \begin{cases} V & 0 < x \leq x_1 \\ 0 & x_1 < x < X \end{cases} \quad (6.35)$$

und den Abkürzungen

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) = \omega_1^2 \quad (6.36a)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = \omega^2 \quad (6.36b)$$

sowie ω_1 aus (3.23d) und ω aus (3.23e) (jeweils für $k = 0$) schließlich Gl. (6.33). Gl. (6.34) kann also als die in Real- und Imaginärteil aufgespaltene zeitunabhängige Schrödingergleichung eines Teilchens ohne Spin in einem stückweise konstanten, periodischen Potential, mithin als das aus der Festkörperphysik wohlbekannte Kronig–Penney–Modell aufgefasst werden.

Sphärische Koordinaten

Um die einfachen, über das Kronig–Penney–Modell konstruierbaren Lösungen des linearen Problems nutzen zu können, ist es sinnvoll, im zweidimensionalen Vektorraum der Elemente $\Phi(t)$ neben einer Darstellung in kartesischen Koordinaten (ϕ_R, ϕ_I) auch sogenannte „sphärische“ Koordinaten (ϕ_+, ϕ_-)

einzuführen. Dieser Übergang von kartesischen zu sphärischen Koordinaten ist rein technischer Natur. Er wird sich jedoch bei der Bestimmung der Rechts- und Linkseigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ bzw. $\mathbf{v}_c(t)$ und insbesondere bei der Berechnung der nichtlinearen Koeffizienten der Amplitudengleichungen als sehr zweckmäßig erweisen.

Wir wollen zuerst den Begriff „sphärische“ Koordinaten (bzw. „sphärische“ Komponentendarstellung) etwas präziser definieren. Dazu betrachten wir nochmals die kartesische Darstellung der ursprünglich komplexen Feldgröße (vgl. Gl. (6.1))

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_I \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \phi_R, \phi_I \in \mathbb{R} \quad . \quad (6.37)$$

Nach Gl. (6.37) ist Φ ein Vektor im reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 . Doch ähnlich wie ein Drehoperator im \mathbb{R}^2 keine Eigenvektoren im reellen Vektorraum besitzt, werden wir auch für den Operator $\mathcal{L}^{(0)}(t)$ keine Rechts- und Linkseigenvektoren aus \mathbb{R}^2 finden. Wir werden deshalb im folgenden \mathbb{R}^2 zu einem komplexen Vektorraum \mathbb{C}^2 erweitern.

Dazu wechseln wir in die sphärische Koordinatendarstellung über, die durch

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_R \pm i\phi_I) \quad (6.38)$$

gegeben ist³. Dabei bezeichnet $\phi_+ = \phi/\sqrt{2}$ im wesentlichen die ursprüngliche komplexwertige Koordinate der stereographischen Projektion.

Je nach Wahl der Basis im Raum \mathbb{C}^2 (kartesisch oder sphärisch) haben auch die Matrizen $\underline{\underline{A}}$, die einem Operator \mathcal{A} zugeordnet sind, unterschiedliche Gestalt. Dies ist aus der linearen Algebra wohlbekannt. Ein später in Abschnitt 6.3.3 benutztes Beispiel soll diesen Sachverhalt noch einmal verdeutlichen.

Die Operatoren \mathcal{C} und \mathcal{B} seien in kartesischen Koordinaten $\Phi^T = (\phi_R, \phi_I)$ durch die Matrizen

$$\underline{\underline{C}}^{(\text{kart})} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{B}}^{(\text{kart})} = \begin{pmatrix} \Gamma & 1 \\ -1 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

definiert. Bei einer sphärischen Koordinatenwahl $\Phi^T = (\phi_+, \phi_-)$ lauten die

³Die Umkehrung der Transformation (6.38) ist natürlich durch

$$\phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ + \phi_-) \quad \text{und} \quad \phi_I = -i \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ - \phi_-)$$

gegeben.

entsprechenden Matrizen⁴

$$\underline{\underline{C}}^{(\text{sp})} = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & a - \frac{b}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{B}}^{(\text{sp})} = -i \begin{pmatrix} 1 + i\Gamma & 0 \\ 0 & -(1 - i\Gamma) \end{pmatrix} \quad . \quad (6.40)$$

Nach diesen technischen Bemerkungen kehren wir wieder zur Physik zurück und diskutieren im weiteren Verlauf die Lösungen des Kronig–Penney–Modells.

Abbildung auf Kronig–Penney–Modell und dessen Lösung

Durch den Wechsel auf sphärische Koordinaten können wir die Bewegungsgleichung (6.33) zusammen mit den zu fordernden Stetigkeitsbedingungen bei $t = t_1$ und $t = T$ auf das Kronig–Penney–Modell für die quantenmechanische Beschreibung der Bewegung eines Teilchens in einem Kastenpotential abbilden. Das Kastenpotential besteht dabei aus periodisch im Ort aneinander gereihten Potentialschwellen endlicher Höhe (s. Abb. (6.2) oder [BBCK])

Um dieses Modell auf unser System anwenden zu können, muss im Wesentlichen nur die Ortsvariable des Kronig–Penney–Modells mit der bei uns vorliegenden Zeitvariablen identifiziert werden. In der Quantenmechanik ändern Potentialschwellen endlicher Höhe an den Sprungstellen nicht die Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer Ableitung. Demgegenüber haben wir aber in Gl. (6.31) einen Sprung in der Ableitung der Funktion $\tilde{\Phi}(t)$ an den Intervallgrenzen $t = t_1$ und $t = T$. Diese resultieren aus der stetigen Differenzierbarkeit der Lösung $\mathbf{u}_c(t)$, die sich dann auf entsprechende Anschlussbedingungen für die Grösse $\tilde{\Phi}(t)$ überträgt. Zunächst möchten wir das Kronig–Penney–Modell auf diese Weise modifizieren und dessen Lösung bestimmen.

Wir betrachten im Folgenden eine der sphärischen Komponenten des Vektors $\tilde{\Phi}(t)$, z.B. $\tilde{\phi}_+(t)$. Um die Notation übersichtlich zu halten werden wir darauf verzichten, den Index explizit anzugeben und die verkürzte Schreibweise $\tilde{\phi}(t)$

⁴Allgemein ist der Zusammenhang zwischen sphärischen und kartesischen Komponenten einer Abbildung \mathcal{A}

$$\underline{\underline{A}}^{(\text{sp})} = \begin{pmatrix} A_{--} & A_{-+} \\ A_{+-} & A_{++} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{A}}^{\text{kart}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

durch

$$\begin{aligned} A_{--} &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22} - i(A_{12} - A_{21})) & A_{-+} &= \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22} - i(A_{12} + A_{21})) \\ A_{++} &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22} + i(A_{12} - A_{21})) & A_{+-} &= \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22} + i(A_{12} + A_{21})) \end{aligned}$$

gegeben.

für $\tilde{\phi}_+(t)$ verwenden. Durch direkte Integration von Gl. (6.33) erhalten wir für die Komponente $\tilde{\phi}(t)$

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{-i\omega_1 t} & \text{für } 0 < t < t_1 \\ A_2 e^{i\omega(t-t_1)} + B_2 e^{-i\omega(t-t_1)} & \text{für } t_1 < t < T \end{cases}, \quad (6.41)$$

wobei die Integrationskonstanten A_i und B_i aus den Stetigkeits- und Sprungbedingungen an den Intervallgrenzen zu bestimmen sind.

Da wir fordern, dass die volle Funktion $\Phi(t)$ auch bei $t = t_1$ und bei $t = T$ stetig ist, folgt daraus auch die Stetigkeit für die abgespaltene Funktion $\tilde{\Phi}(t)$ (s. Gl. (6.31)). Allerdings gilt dann, wie bereits erwähnt, für die zeitliche Ableitung der letztgenannten Größe aus Gl. (6.32), dass an den Anschlussstellen Sprünge auftreten, deren Höhe von der Amplitude des stückweise konstant treibenden Feldes abhängt.

Alle Anschlussbedingungen lassen sich für die Komponente $\tilde{\phi}(t)$ des Vektors $\tilde{\Phi}(t)$ unter Ausnutzung von Gl. (6.41) demnach wie folgt zusammenfassen:

$$\tilde{\phi}(t_1 - 0) = \tilde{\phi}(t_1 + 0) \quad (6.42a)$$

$$\dot{\tilde{\phi}}(t_1 - 0) = \dot{\tilde{\phi}}(t_1 + 0) - ih\tilde{\phi}(t_1) \quad (6.42b)$$

$$\tilde{\phi}(T - 0) = \tilde{\phi}(T + 0) \quad (6.42c)$$

$$\dot{\tilde{\phi}}(T - 0) = \dot{\tilde{\phi}}(T + 0) + ih\tilde{\phi}(T) \quad (6.42d)$$

mit $h > 0$.

In die Anschlussbedingungen (6.42c) und (6.42d) geht die Lösung $\tilde{\phi}(t)$ für $t > T$ ein. Da wir ein zeitlich periodisches Problem betrachten, und wir an der Berechnung der zeitlichen Eigenmoden interessiert sind, folgt direkt aus der Floquet-Eigenschaft, dass $\phi(t+T) = e^{i\omega_c T} \phi(t)$ gilt. Wegen der Bifurkationsbedingung an der Hopf-Schwelle (vergl. Gl. (3.11a)) überträgt sich diese Eigenschaft auf $\tilde{\phi}(t)$, d.h.

$$\tilde{\phi}(t+T) = \Lambda(A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{-i\omega_1 t}) \quad , \quad (6.43)$$

wobei $\Lambda = e^{+i\omega_c T}$ den Floquet-Multiplikator bezeichnet.

Damit erhalten wir aus (6.42a), (6.42b), (6.42c) und (6.42d) ein Gleichungssystem für die noch unbekannten Amplituden A_i und B_i :

$$A_1 e^{i\omega_1 t_1} + B_1 e^{-i\omega_1 t_1} = A_2 + B_2 \quad (6.44a)$$

$$i(\omega_1 + h)A_1 e^{i\omega_1 t_1} - i(\omega_1 - h)B_1 e^{i\omega_1 t_1} = i\omega(A_2 - B_2) \quad (6.44b)$$

$$A_2 e^{i\omega(T-t_1)} + B_2 e^{-i\omega(T-t_1)} = \Lambda(A_1 + B_1) \quad (6.44c)$$

$$i(\omega - h)A_2 e^{i\omega(T-t_1)} - i(\omega + h)B_2 e^{-i\omega(T-t_1)} = i\omega_1 \Lambda(A_1 - B_1) \quad (6.44d)$$

Nullsetzen der Determinante dieses homogenen Gleichungssystem (6.44a) — (6.44d) ergibt gerade die Eigenwertgleichung für Λ . Wir erhalten somit auch auf diese Weise die Gleichung für die Funktion $q(T, q_c)$ aus Gl. (3.23c),

$$\begin{aligned} \cos \omega_c T &= q(T, q_c) \\ &= \cos(\omega_1 t_1) \cos(\omega(T - t_1)) - \frac{\omega_1^2 + \omega^2 + h^2}{2\omega_1 \omega} \sin(\omega_1 t_1) \sin(\omega(T - t_1)) \end{aligned} \quad (6.45)$$

mit ω_1 aus Gl. (3.23d) und ω aus (3.23e) (jeweils für $k = 0$).

Somit haben wir die Eigenlösungen $\Phi(t)$ (s. Gl. (6.31)) bestimmt, indem wir die hier gewählten sphärischen Komponenten aus Gl. (6.38) auf Lösungen des Kronig–Penney–Modells abgebildet haben. Gl. (6.41) gibt den expliziten Ausdruck vor, wobei die Amplituden durch das Gleichungssystem (6.44a) — (6.44d) bestimmt werden.

Im folgenden Unterabschnitt wird daher die Frage zu lösen sein, in welcher Form wir diese Erkenntnisse für die Bestimmung der nötigen kritischen Rechts- und Linkseigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ und $\mathbf{v}_c(t)$ des linearen Operators $\mathcal{L}^{(0)}(t)$ übernehmen können.

6.3.2 Berechnung der Eigenvektoren

Wir werden jetzt eine Relation zwischen den Eigenlösungen $\Phi(t)$ des Kronig–Penney–Modells und den über die Gl. (6.5) definierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ herstellen. Für die folgenden Überlegungen verwenden wir dabei die Abürzungen

$$\mathbf{u}^{(+)}(t) := \mathbf{u}_c(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^{(-)}(t) := \mathbf{u}_c^*(t) \quad (6.46)$$

Die Eigenlösung des linearen Systems $\dot{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{(0)}(t)\Phi(t)$ (und das konjugiert komplexe dieser Lösung) lässt sich, vermöge des oben diskutierten Floquet–Ansatzes in der Form

$$\Phi^{(\pm)}(t) = e^{\mp i\omega_c t} \mathbf{u}^{(\pm)}(t) \quad (6.47)$$

ausdrücken. Analog zu den Abspaltungen $\tilde{\Phi}^{(\pm)}(t)$ der Eigenlösungen aus Gl. (6.31) definieren wir hier Vektoren $\tilde{\mathbf{u}}^{(\pm)}(t)$ durch

$$\mathbf{u}^{(\pm)}(t) = e^{\mp i\omega_c t} \begin{cases} e^{-\Gamma(\alpha - \frac{b}{2} - h)t} \tilde{\mathbf{u}}^{(\pm)}(t) & \text{für } 0 < t < t_1 \\ e^{-\Gamma((\alpha - \frac{b}{2} - h)t_1 + (\alpha - \frac{b}{2})(t - t_1))} \tilde{\mathbf{u}}^{(\pm)}(t) & \text{für } t_1 < t < T \end{cases} \quad (6.48)$$

so dass durch Vergleich von Gl. (6.48) und Gl. (6.47) mit (6.31) die zentrale Beziehung

$$\tilde{\Phi}^{(\pm)}(t) = \tilde{\mathbf{u}}^{(\pm)}(t) \quad (6.49)$$

ersichtlich wird.

Aus der Darstellung (6.41) folgt dann mit (6.49) unmittelbar für die sphärische $+$ -Komponente des Eigenvektors $\tilde{\mathbf{u}}^{(\pm)}(t)$

$$\tilde{u}_+^{(+)}(t) = \begin{cases} A_1^{(+)} e^{i\omega_1 t} + B_1^{(+)} e^{-i\omega_1 t} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ A_2^{(+)} e^{i\omega(t-t_1)} + B_2^{(+)} e^{-i\omega(t-t_1)} & \text{für } t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6.50a)$$

$$\tilde{u}_+^{(-)}(t) = \begin{cases} A_1^{(-)} e^{i\omega_1 t} + B_1^{(-)} e^{-i\omega_1 t} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ A_2^{(-)} e^{i\omega(t-t_1)} + B_2^{(-)} e^{-i\omega(t-t_1)} & \text{für } t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6.50b)$$

Der Index (\pm) an den Integrationskonstanten A_i und B_i trägt dabei dem Umstand Rechnung, dass wir Gl. (6.41) sowohl für den Eigenvektor $\mathbf{u}^{(+)}(t) = \mathbf{u}_c(t)$ als auch für das konjugiert komplexe $\mathbf{u}^{(-)}(t) = \mathbf{u}_c^*(t)$ ausgewertet haben. Dementsprechend ist in Gl. (6.41) entweder $\Lambda = \Lambda_+ = \exp(i\omega_c T)$ bzw. $\Lambda = \Lambda_- = \exp(-i\omega_c T)$ zu setzen. Durch Lösen des Gleichungssystems (6.44a)–(6.44d) erhalten wir nach geeigneter Normierung

$$A_1^{(\pm)} = \frac{b}{2}(1 + i\Gamma) \frac{\omega_1(s_1 c_2 + s_2 c_1 + i h s_1 s_2) - i(\omega_1^2 s_1 s_2 + \Lambda_{\pm})}{2\omega_1 \sqrt{2(q_2 - \sqrt{1 - q^2})} \sqrt{1 - q^2}} \quad (6.51a)$$

$$B_1^{(\pm)} = \frac{b}{2}(1 + i\Gamma) \frac{\omega_1(s_1 c_2 + s_2 c_1 + i h s_1 s_2) + i(\omega_1^2 s_1 s_2 + \Lambda_{\pm})}{2\omega_1 \sqrt{2(q_2 - \sqrt{1 - q^2})} \sqrt{1 - q^2}} \quad (6.51b)$$

$$A_2^{(\pm)} = \frac{b}{2}(1 + i\Gamma) \frac{\omega[s_1(\omega_1^2 s_1 s_2 + \Lambda_{\pm}) + s_2 c_1^2] + i[c_2 - (i h s_1 + c_1)\Lambda_{\pm}]}{2\omega \sqrt{2(q_2 - \sqrt{1 - q^2})} \sqrt{1 - q^2}} \quad (6.51c)$$

$$B_2^{(\pm)} = \frac{b}{2}(1 + i\Gamma) \frac{\omega[s_1(\omega_1^2 s_1 s_2 + \Lambda_{\pm}) + s_2 c_1^2] - i[c_2 - (i h s_1 + c_1)\Lambda_{\pm}]}{2\omega_2 \sqrt{2(q_2 - \sqrt{1 - q^2})} \sqrt{1 - q^2}} \quad (6.51d)$$

mit den Abkürzungen

$$s_1 = \frac{\sin(\omega_1 t_1)}{\omega_1} \quad s_2 = \frac{\sin(\omega(T - t_1))}{\omega} \quad (6.52a)$$

$$c_1 = \cos(\omega_1 t_1) \quad c_2 = \cos(\omega(T - t_1)) \quad (6.52b)$$

sowie

$$q_2 = (\alpha - \frac{b}{2} - h) s_1 c_2 + (\alpha - \frac{b}{2}) s_2 c_1 \quad (6.52c)$$

$$q = c_1 c_2 - \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega^2 + h) s_1 s_2 \quad . \quad (6.52d)$$

ω_1 wird aus (3.23d) (für $k = 0$) und ω aus (3.23e) (für $k = 0$) bestimmt. Der Ausdruck $\Lambda_{\pm} = \exp(\pm i\omega_c T)$ beschreibt den Floquet-Multiplikator und

q die Funktion $q(T, q_c)$ aus (6.45), die wir aber bereits in Kapitel 3 für die Berechnung der Spur des Zeitentwicklungsoperators bestimmt hatten.

Wegen der Normierungsbedingung der Eigenvektoren (s. Anhang E) müssen wir keine weiteren Komponenten angeben, da gilt:

$$v_-^{(+)*}(t) = -u_+^{(-)}(t) \quad (6.53a)$$

$$v_-^{(-)*}(t) = u_+^{(+)}(t) \quad (6.53b)$$

Damit ist es gelungen, die Ausdrücke für die explizit zeitabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ und $\mathbf{v}_c(t)$ im Falle des stückweise konstant treibenden Feldes anzugeben.

6.3.3 Bestimmung von r

Um die gewählte Darstellung zur Berechnung des kubischen Koeffizienten aus Gl. (6.18d) zu verwenden, müssen wir uns noch überlegen, wie dieser Ausdruck in sphärischen Komponenten aussieht. Da es sich bei Gl. (6.18d) um ein Skalarprodukt handelt, ist sein Wert invariant gegenüber der gewählten Basisdarstellung.

Bestimmung der kubischen Nichtlinearität $\Delta(t)$

Wegen der Invarianz von Skalarprodukten bezüglich der Basisdarstellung werden wir die Sortierung der kubischen Nichtlinearität zuerst in kartesischen Komponenten betrachten. Nach Bildung des Skalarproduktes kehren wir dann zu den sphärischen Komponenten zurück, da wir in diesen die explizit zeitabhängigen Eigenvektoren bestimmt haben. Zur Sortierung der kubischen Nichtlinearität betrachten wir die Bewegungsgleichung (6.1) in kartesischen Komponenten, die für die komplexe Größe $\phi = \phi_R + i\phi_I$

$$\dot{\phi} = \dots (i - \Gamma) \{ 2b (\phi_R^2 + i\phi_R\phi_I) \phi_R - 2a (\phi_R^2 + \phi_I^2) (\phi_R + i\phi_I) \} \quad (6.54)$$

wobei wir uns auf die Angabe der führenden nichtlinearen Terme, d.h. der Terme dritter Ordnung beschränkt haben. Nach Zerlegung der rechten Seite von Gl. (6.54) in Real- und Imaginärteil folgt für den reellen Vektor $\Phi = (\phi_R, \phi_I)^T$ aus Gl. (6.54)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3[\Phi(t)] &= \begin{pmatrix} 2\Gamma(a-b)\phi_R^2 + 2\Gamma a\phi_I^2 & 2(a-b)\phi_R^2 + 2a\phi_I^2 \\ -2(a-b)\phi_R^2 - 2a\phi_I^2 & 2\Gamma(a-b)\phi_R^2 + 2\Gamma a\phi_I^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_I \end{pmatrix} \\ &= 2 \left[(\phi_R, \phi_I) \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Gamma & 1 \\ -1 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_I \end{pmatrix}, \quad (6.55) \end{aligned}$$

wobei wir für die Bezeichnung der kubischen Nichtlinearität die in Gl. (6.9) eingeführte Notation verwendet haben. Gl. (6.55) lässt sich auch abkürzen zu

$$\mathcal{N}_3[\Phi(t)] = 2 \left(\Phi(t) \mid \underline{\underline{C}}^{(\text{kart})} \Phi(t) \right) \underline{\underline{B}}^{(\text{kart})} \Phi(t) \quad (6.56)$$

mit den Matrizen $\underline{\underline{C}}$ und $\underline{\underline{B}}$ in dieser gewählten kartesischen Basis aus Gl. (6.39).

Betrachten wir den Ansatz aus Gl. (6.10), d.h.

$$\Phi(t) = \varepsilon \left(A e^{i\omega_c t} \mathbf{u}_c(t) + A^* e^{-i\omega_c t} \mathbf{u}_c^*(t) \right) \quad (6.57)$$

und setzen diesen in Gl. (6.56) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3[\Phi(t)] = & 2|A|^2 A e^{i\omega_c t} \left\{ 2 \left(\mathbf{u}_c(t) \mid \underline{\underline{C}}^{(\text{kart})} \mathbf{u}_c(t) \right) \underline{\underline{B}}^{(\text{kart})} \mathbf{u}_c(t) \right. \\ & \left. + \left(\mathbf{u}_c^*(t) \mid \underline{\underline{C}}^{(\text{kart})} \mathbf{u}_c(t) \right) \underline{\underline{B}}^{(\text{kart})} \mathbf{u}_c^*(t) \right\} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (6.58)$$

Dabei bezeichnet \dots all diejenigen Terme, die nach Multiplikation mit dem Linkseigenvektor $\mathbf{v}(t)$ bei Anwendung der Säkularbedingung aus Gl. (6.15) keinen Beitrag zum nichtlinearen Koeffizienten liefern. Da wir letztendlich in der Bestimmungsgleichung für den Koeffizienten r aus Gl. (6.18d) Skalarprodukte auswerten werden, ist es zweckmäßig, bereits bei den eben vorgenommenen Überlegungen die Eigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ und $\mathbf{u}_c^*(t)$ durch die Symbole aus Gl. (6.46) abzukürzen. Unter Verwendung der Notation aus Gl. (6.46) erhalten wir aus (6.58)

$$\Delta(t) = 4 \left(\mathbf{u}^{(+)}(t) \mid \mathcal{C} \mathbf{u}^{(+)}(t) \right) \mathcal{B} \mathbf{u}^{(+)}(t) + 2 \left(\mathbf{u}^{(-)}(t) \mid \mathcal{C} \mathbf{u}^{(+)}(t) \right) \mathcal{B} \mathbf{u}^{(-)}(t) \quad (6.59)$$

mit den Operatoren \mathcal{B} und \mathcal{C} , wie wir sie bereits in Abschnitt 6.3.1 bei der Einführung der sphärischen Koordinaten kennengelernt haben.

Berechnung des nichtlinearen Koeffizienten r

Für die Berechnung von r aus Gl. (6.18d) müssen wir $\Delta(t)$ aus Gl. (6.59) mit dem Linkseigenvektor multiplizieren. Nutzen wir Relationen für die Eigenvektoren aus (6.53a) bis (6.53b) aus, so können wir die Skalarprodukte aus (6.60) durch Produkte des Eigenvektors $\tilde{\mathbf{u}}^{(\pm)}$ ausdrücken und erhalten

$$\begin{aligned} r = \frac{4}{T} \int_0^T dt e^{-2\Gamma\xi(t)} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(+)}(t) \mid \mathcal{C} \tilde{\mathbf{u}}^{(+)}(t) \right) \left(\tilde{\mathbf{v}}^{(+)}(t) \mid \mathcal{B} \tilde{\mathbf{u}}^{(+)}(t) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(-)}(t) \mid \mathcal{C} \tilde{\mathbf{u}}^{(+)}(t) \right) \left(\tilde{\mathbf{v}}^{(+)}(t) \mid \mathcal{B} \tilde{\mathbf{u}}^{(-)}(t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.60)$$

mit dem durch das treibende Feld bestimmten zeitabhängigen Exponenten

$$\xi(t) = \begin{cases} (\alpha - \frac{b}{2} - h)t & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ (\alpha - \frac{b}{2} - h)t_1 + (\alpha - \frac{b}{2})(t - t_1) & \text{für } t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6.61)$$

und den Operatoren \mathcal{B} und \mathcal{C} , die in sphärischen Koordinaten die Form aus Gl. (6.40) annehmen.

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \mid \underline{\underline{C}} \tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \right) &= \left(a - \frac{b}{2} \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \mid \tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \right) - \frac{b}{2} (\tilde{u}_+^* \tilde{u}_- + \tilde{u}_+ \tilde{u}_-^*) \\ &= \left(a - \frac{b}{2} \right) (|\tilde{u}_+|^2 + |\tilde{u}_-|^2) - \frac{b}{2} (\tilde{u}_+^* \tilde{u}_- + \tilde{u}_+ \tilde{u}_-^*) \end{aligned} \quad (6.62a)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(-)} \mid \underline{\underline{C}} \tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \right) &= \left(a - \frac{b}{2} \right) \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(-)} \mid \tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \right) - \frac{b}{2} (\tilde{u}_+^2 + \tilde{u}_-^2) \\ &= 2 \left(a - \frac{b}{2} \right) \tilde{u}_- \tilde{u}_+ - \frac{b}{2} (\tilde{u}_+^2 + \tilde{u}_-^2) \end{aligned} \quad (6.62b)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{v}}^{(+)} \mid \underline{\underline{B}} \tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \right) &= \Gamma - i \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \mid \tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \right) \\ &= \Gamma - i (|\tilde{u}_+|^2 + |\tilde{u}_-|^2) \end{aligned} \quad (6.62c)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{v}}^{(+)} \mid \underline{\underline{B}} \tilde{\mathbf{u}}^{(-)} \right) &= -i \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(+)} \mid \tilde{\mathbf{u}}^{(-)} \right) \\ &= -2i \tilde{u}_-^* \tilde{u}_- \quad . \end{aligned} \quad (6.62d)$$

Dabei haben wir bei den Komponenten \tilde{u}_\pm auf die Angabe des oberen Index (+) verzichtet um die Notation einigermaßen übersichtlich zu halten. Mit diesen Matrixelementen und dem Ausdruck für die Eigenvektoren (siehe Gl. (6.50a) und (6.50b)) lässt sich das Zeitintegral (6.60) direkt auswerten. Wir verzichten hier aber auf die explizite Angabe des recht langen Ausdrucks, da wir uns im nächsten Abschnitt mit dem Grenzfall des δ -förmigen treibenden Feldes beschäftigen wollen. In diesem Grenzfall wird der Ausdruck für den kubischen Koeffizienten deutlich kompakter.

6.3.4 Übergang zum δ -gekickten Fall

Wir berechnen den Koeffizienten r für das δ -gekickte System, indem wir im Ergebnis von (6.60) in den darin auftretenden Größen den Übergang zum δ -gekickten System vollziehen. So gehen die Vektorkomponenten $\tilde{u}_+^{(+)}$ und $\tilde{u}_+^{(-)}$ aus den Bestimmungsgleichungen (6.50a) und (6.50b) mit Gl. (6.51a) — (6.51d) in die entsprechenden Ausdrücke für das δ -gekickte System analog zur Vorgehensweise aus Kapitel 5 über⁵.

⁵Nach Anhang E haben wir beim Übergang zum δ -gekickten System auch die Vektorkomponenten $\tilde{u}_-^{(-)}$ und $\tilde{u}_-^{(+)}$ berücksichtigt.

Dazu lassen wir $t_1 \rightarrow 0$ und die zugehörige Amplitude des treibenden Feldes $h \rightarrow \infty$ gehen unter der Bedingung, dass $ht_1 \rightarrow \kappa$ mit $\kappa > 0$ gilt. Dabei ist κ die Kickstärke des δ -Kicks. Das Zeitintervall $t_2 = T - t_1$ wird auf die volle Periode T ausgedehnt. Dadurch ergeben sich einige Vereinfachungen in den Termen aus Gl. (6.51a) — (6.51d).

Im Einzelnen sehen wir, dass analog zur Vorgehensweise aus Kapitel 5 die Funktionen c_1 und c_2 aus Gl. (6.52b) in $c_1 = \cos \kappa$ und $c_2 = \cos \omega T$ übergehen. Die Funktion $\omega_1 s_1$ aus Gl. (6.52a) wird mit Gl. (3.23e) (für $k = 0$) zu $\sin \kappa$, während die Funktion s_1 verschwindet und $s_2 = \sin \omega T / \omega$ wird. Die Funktion q aus Gl. (6.52d) vereinfacht sich analog zum Abschnitt 5.1.2 zu Gl. (5.2a), die im Falle der Hopf Bifurkation zu

$$q = \cos \omega T \cos \kappa - \frac{\alpha - \frac{b}{2}}{\omega} \sin \omega T \sin \kappa \quad (6.63)$$

wird. Die zusätzlich auftretende Funktion q_2 aus Gl. (6.52c) wird dann zu

$$q_2 = \frac{\alpha - \frac{b}{2}}{\omega} \sin \omega T \cos \kappa + \cos \omega T \sin \kappa \quad . \quad (6.64)$$

Für den Floquet–Multiplikator Λ erhalten wir

$$\Lambda_{\pm} = q \pm i\sqrt{1 - q^2} := e^{\pm i\omega_c T} \quad (6.65)$$

mit $q(T, q_c)$ aus Gl. (6.63). Mit all diesen Umformungen berechnen wir die Amplituden $A_i^{(\pm)}$ und $B_i^{(\pm)}$ aus Gln. (6.51a) — (6.51d) und erhalten

$$A_1^{(\pm)} = \bar{M} \sin \omega T (e^{-i\kappa} - i \sin \kappa) \quad (6.66a)$$

$$A_2^{(\pm)} = i\bar{M} (e^{-i\omega T} - \Lambda_{\pm} e^{-i\kappa}) \quad (6.66b)$$

$$B_1^{(\pm)} = \bar{M} \sin \omega T \cos \kappa \quad (6.66c)$$

$$B_2^{(\pm)} = -i\bar{M} (e^{i\omega T} - \Lambda_{\pm} e^{-i\kappa}) \quad (6.66d)$$

mit

$$\bar{M} = \frac{\frac{b}{2}(1 + i\Gamma)}{2\omega\sqrt{2(q_2 - \sqrt{1 - q^2})\sqrt{1 - q^2}}} \quad (6.66e)$$

und q_2 aus Gl. (6.64) sowie q aus Gl. (6.63). Dann folgen aus Gln. (6.66a) — (6.66b) für die Eigenvektorkomponenten $\tilde{u}_+^{(+)}(t)$ aus Gl. (6.50a) und $\tilde{u}_+^{(-)}(t)$

aus Gl. (6.50b)

$$\tilde{u}_+^{(+)}(t) = \bar{M} \begin{cases} 2 \sin \omega T e^{-i\kappa} & \text{für } t = 0- \\ e^{i\omega t}(ie^{-i\omega T} - ie^{-i\kappa}\Lambda_+) + \\ e^{-i\omega t}(-ie^{i\omega T} + ie^{-i\kappa}\Lambda_+) & \text{für } 0 < t \leq T \end{cases} \quad (6.67a)$$

$$\tilde{u}_+^{(-)}(t) = \bar{M} \begin{cases} 2 \sin \omega T e^{-i\kappa} & \text{für } t = 0- \\ e^{i\omega t}(ie^{-i\omega T} - ie^{-i\kappa}\Lambda_-) + \\ e^{-i\omega t}(-ie^{i\omega T} + ie^{-i\kappa}\Lambda_-) & \text{für } 0 < t \leq T \end{cases} . \quad (6.67b)$$

Mit diesen Gleichungen (6.66a) — (6.66e) haben wir die explizite Form für die benötigten Eigenvektoren bestimmt. Setzen wir diese in Gln. (6.62a) — (6.62d) und (6.60) so verbleibt, das Zeitintegral zu berechnen. Wegen des Grenzfalles $t_1 \rightarrow 0$, d.h. dem Übergang zum δ -Kick, gestaltet sich das relativ einfach. Es verbleiben einzig die Anteile die mit den Amplituden $A^\pm := A_2^{(\pm)}$ und $B^\pm := B_2^{(\pm)}$ verknüpft sind. Aufsammeln aller Fourierkomponenten ergibt für den Koeffizienten r

$$r = 4 \left\{ s(0) K_0 + s(2\omega) K_2 + s(-2\omega) K_{-2} + s(4\omega) K_4 + s(-4\omega) K_{-4} \right\} \quad (6.68a)$$

mit

$$\begin{aligned} K_0 = & \Gamma \left(a - \frac{b}{2} \right) \left[|A^+|^2 + |A^-|^2 + |B^+|^2 + |B^-|^2 \right] \\ & \times \left[1 - i \left[|A^+|^2 + |A^-|^2 + |B^+|^2 + |B^-|^2 \right] \right] \\ & - \Gamma \frac{b}{2} \left[1 - i \left[|A^+|^2 + |A^-|^2 + |B^+|^2 + |B^-|^2 \right] \right] \\ & \times [A^+ B^- + A^- B^+ + A^{+*} B^{-*} + A^{-*} B^{+*}] \\ & - 2i \left(a - \frac{b}{2} \right) \left[|A^+|^2 + |B^+|^2 \right] \left[|A^-|^2 + |B^-|^2 \right] \\ & + i \frac{b}{4} \left[2 [A^+ B^+ + A^{-*} B^{-*}] [A^- A^{+*} + B^{+*} B^-] \right. \\ & \left. + A^{+*} B^- [A^{+2} + B^{-*2}] + A^- B^{+*} [B^{+2} + A^{-*2}] \right] \end{aligned} \quad (6.68b)$$

und den Fourierintegralen, die aus der Integration von (6.60) nach anschließendem Übergang zum δ -gekickten System übrig bleiben:

$$\begin{aligned} s(k\omega) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-2\Gamma\xi(t)} e^{ik\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{ik\omega - 2\Gamma(\alpha - \frac{b}{2})} \left[e^{ik\omega T} - e^{2\Gamma(\alpha - \frac{b}{2})T} \right] \end{aligned} \quad (6.68c)$$

Die Produkte K_2 bis K_{-4} sind in Anhang F angegeben⁶.

Wir haben auf diese Weise mit den Gl. (6.68a) mit (6.68b), (F.3a) — (F.3d), (6.68c) und den Amplituden aus (6.66a) — (6.66e) den nichtlinearen Koeffizienten r komplett bestimmt. Dieser Ausdruck ist an sich sehr umfangreich und einer weiteren allgemeinen Betrachtung nur schwer zugänglich. Deswegen werden wir im nächsten Unterabschnitt an den Entartungspunkt im Bifurkationsdiagramm gehen und alle Koeffizienten der entstandenen Amplitudengleichung Gl. (6.17) bestimmen.

6.4 Koeffizienten am Entartungspunkt der Hopf–Bifurkationslinie

Wie wir bereits in Abschnitt 5.4 gesehen haben, ergeben sich im δ -gekickten System ohne Dämpfung Paare sich gegenseitig umschlingender Soft-mode- bzw. Flip-Bifurkationslinien. Ein Paar sich umschlingender Soft-mode-Bifurkationslinien, deren Verlauf durch Gl. (5.6a) und (5.6b) gegeben sind, schneiden sich im Punkte $\kappa = \pi$ (s. Abb. 5.2).

Wie wir in Abschnitt 5.6 bzw. in Abschnitt 4.3 gesehen haben, verschwindet jeder Kreuzungspunkt bzw. Entartungspunkt schon bei kleiner, endlicher Dämpfung. Erst dadurch wird die darunter liegende Hopf–Bifurkationslinie als Instabilitätsschwelle physikalisch relevant. Weiterhin haben wir in Abschnitt 5.4.1 die Kreuzungspunkte dieser Bifurkationslinien für verschwindende Dämpfung bestimmt. Dadurch, dass diese Kreuzungspunkte alle auf horizontalen Linien liegen und bei endlichen Dämpfungen alle diese Punkte simultan aufbrechen, ist es gewährleistet, dass rechts von diesen Punkte keine weiteren Soft-mode- oder Flip-Bifurkationslinien auftreten. Damit stellt dieser Punkt in der Tat einen Hopf–Bifurkationspunkt für die triviale Lösung dar.

Für diesen speziellen Wert für κ vereinfachen sich viele Ausdrücke. So nimmt die Funktion $q(T, q_c)$ (s. Gl. (6.63)) aus (3.23a) für die Spur des Zeitentwicklungsoperators eine einfache Form an. $q(T, q_c)$ wird zu:

$$q = -\cos \bar{\omega} \quad (6.69)$$

mit der Frequenz $\bar{\omega}$, die sich nach Anwendung der Hopf–Bedingung (5.3) aus (5.2b) (für $k = 0$) zu

$$\bar{\omega} = \omega T = \sqrt{\pi^2 - (\Gamma^2 + 1)\left(\frac{bT}{2}\right)^2} \quad (6.70)$$

⁶Die Beiträge K_2 bis K_{-4} werden im anschließenden Spezialfall keine Beträge liefern.

ergibt. Wir können weiterhin die Werte für alle Koeffizienten bestimmen und erhalten, wie man sieht, einfachere Ausdrücke.

- Linearer Koeffizient η :

Aus Gl. (6.26a) und (6.26b) erhalten wir mit $\kappa = \pi$ für den Real- und Imaginärteil von η

$$\operatorname{Re}\eta = \frac{\Gamma}{T} \delta\kappa \quad (6.71a)$$

$$\operatorname{Im}\eta = \frac{\pi}{\bar{\omega}T} \delta\kappa \quad (6.71b)$$

mit $\bar{\omega}$ aus Gl. (6.70).

- Diffusiver Koeffizient D :

Aus Gl. (6.28a) und (6.28b) folgt unmittelbar mit $\kappa = \pi$ für den Real- und Imaginärteil von D

$$\operatorname{Re}D = -J\Gamma \quad (6.72a)$$

$$\operatorname{Im}D = J \frac{\pi}{\bar{\omega}T} \quad (6.72b)$$

mit $\bar{\omega}$ aus (6.70).

- Nichtlinearer Koeffizient r :

Berücksichtigen wir $\kappa = \pi$ in den Gleichungen zur Berechnung des nichtlinearen Koeffizienten, insbesondere für die Amplituden aus Gl. (6.66b) und (6.66d), sowie die Produkte dieser Amplituden aus Anhang F, so fallen für $\kappa = \pi$ wegen $A^{(+)} = B^{(-)} = 0$ viele Produkte der Amplituden weg. Die verbleibenden Amplituden aus (6.66a) und (6.66c) werden zu

$$A^- = B^+ = \frac{bT(\Gamma - i)}{2\sqrt{2\bar{\omega}(\bar{\omega} + \pi)}} =: C \quad . \quad (6.73)$$

Wir erhalten eine einzige komplexe Amplitude C . Weiterhin sehen wir (s. Anhang F), dass nur K_0 (s. Gl. (6.68b)) übrig bleibt. Dieser Koeffizient geht über in

$$\begin{aligned} K_0 = & 2\Gamma \left(a - \frac{b}{2}\right) |C|^2 [1 - 2i|C|^2] - \Gamma \frac{b}{2} [1 - 2i|C|^2] [C^2 + C^{*2}] \\ & - 2i \left(a - \frac{b}{2}\right) |C|^4 + i \frac{b}{4} |C|^2 [C^2 + C^{*2}] \quad . \end{aligned} \quad (6.74)$$

Zusätzlich wird der Anteil $s(0)$ von (6.68a), der sich aus der Integration entwickelt hat, jetzt zu

$$s(0) = \frac{1}{2\Gamma\pi} (e^{2\Gamma\pi} - 1) \quad . \quad (6.75)$$

Insgesamt erhalten wir für den nichtlinearen Koeffizienten r aus Gl. (6.68a) mit (6.74) und (6.75)

$$\begin{aligned} r &= 4 K_0 s(0) \\ &= \frac{2}{\Gamma\pi} (e^{2\Gamma\pi} - 1) \left[\Gamma (1 - 2i |C|^2) \left(2 \left(a - \frac{b}{2}\right) |C|^2 - \frac{b}{2} (C^2 + C^{*2}) \right) \right. \\ &\quad \left. - i |C|^2 \left(2 \left(a - \frac{b}{2}\right) |C|^2 - \frac{b}{4} (C^2 + C^{*2}) \right) \right] \quad . \end{aligned} \quad (6.76)$$

Damit haben wir den nichtlinearen Koeffizienten $r = r(b, \Gamma, a)$ bestimmt.

Wir haben somit alle Koeffizienten in der auftretenden Amplitudengleichung (6.17) für den Spezialfall $\kappa = \pi$ bestimmt. Wir haben festgestellt, dass sich in diesem Spezialfall die Koeffizienten wesentlich vereinfachen. Im nächsten Unterabschnitt werden wir die Ausdrücke für die Koeffizienten für kleine Dämpfungen entwickeln.

6.4.1 Entwicklung der Koeffizienten für kleine Dämpfungen

Während wir für den linearen Koeffizienten η aus Gln. (6.71a) und (6.71b) sowie für den diffusiven Koeffizienten D aus Gln. (6.72a) und (6.72b) direkt sehen, dass die Imaginärteile der Koeffizienten die jeweiligen Realteile überwiegen, so ist dies beim nichtlinearen Koeffizienten nicht offensichtlich, sondern erfordert eine genauere Betrachtung.

Bei der Entwicklung von Gl. (6.76) nach kleinen Dämpfungen müssen wir die komplexe Amplitude C aus (6.73) durch

$$C = -i C^{(0)} + \Gamma C^{(0)} + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (6.77a)$$

mit

$$C^{(0)} = \frac{bT}{2\sqrt{2\omega^{(0)}T(\omega^{(0)}T + \pi)}} \quad (6.77b)$$

sowie $\omega^{(0)}$ aus Gl. (5.4f) in Gl. (6.76) berücksichtigen. Nach Durchführung der Entwicklung erhalten wir

$$\operatorname{Re} r = 8 \Gamma a \left(C^{(0)}\right)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (6.78a)$$

$$\operatorname{Im} r = -4 \left(C^{(0)}\right)^2 \left(2a - \frac{b}{2}\right) - 16 \Gamma a \left(C^{(0)}\right)^4 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (6.78b)$$

mit $C^{(0)}$ aus (6.77b). Anhand dieser übersichtlichen Form auch des nichtlinearen Koeffizienten aus Gln. (6.78a) und (6.78b) sehen wir, dass im Grenzfall kleiner Dämpfungen die Imaginärteile der Koeffizienten in der Amplitudengleichung (6.17) die jeweiligen Realteile überwiegen. Die Amplitudengleichung geht im Limes $\Gamma \rightarrow 0$ somit in eine nichtlineare Schrödingergleichung über.

Im folgenden Kapitel werden wir eine weitere Einschränkung vornehmen, indem wir den Fall starker Resonanzen untersuchen.

Kapitel 7

Die starke Resonanz

Lineare Systeme weisen Resonanzphänomene auf, wenn die Periode des Antriebs mit der Periode der internen Frequenzen übereinstimmt. In Ergänzung hierzu können in nichtlinearen Systemen weitere Resonanzen auftreten, wenn beide Frequenzen näherungsweise in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Das Vorliegen solcher Resonanzen wird dabei wesentlich von der Größenordnung der Dissipation beeinflusst. Während in Hamiltonschen Systemen (generischerweise) jedes rationale Frequenzverhältnis zu Resonanzen Anlass gibt [LiLi], sind die meisten dieser Resonanzen in dissipativen Systemen unterdrückt.

Instabilitäten mit endlichen kritischen Wellenzahlen, bei denen das Frequenzverhältnis zwischen Antrieb und Imaginärteil des kritischen Floquet-Eigenwerts eine rationale Zahl ist, werden parametrische Resonanz genannt. Dagegen wird bei Instabilitäten mit verschwindender kritischer Wellenzahl von starker Resonanz gesprochen.

Auf den hier vorliegenden Fall übertragen stellt sich die Situation wie folgt dar. Wenn der Imaginärteil des kritischen Floquet-Exponenten ω_c die halbe $\Omega/2$, drittel $\Omega/3$ oder viertel $\Omega/4$ Frequenz des treibenden Feldes ist, so liegt starke Resonanz vor, da die kritische Wellenzahl verschwindet. Resonanzen höherer Ordnung sind nicht relevant, da sie sich nicht in der niedrigsten nichttrivialen Ordnung der Amplitudengleichungen niederschlagen und die entsprechenden Terme höherer Ordnung (zumindest im Fall räumlich homogener Amplituden) durch eine Koordinatentransformation eliminiert werden können. Die Resonanzbedingungen lassen sich sehr einfach mit Hilfe des zugehörigen Floquet-Multiplikators, $\Lambda = \exp(i\omega_c T)$ formulieren: $\Lambda^2 = 1$, $\Lambda^3 = 1$, bzw. $\Lambda^4 = 1$. Dementsprechend spricht man auch von starken Resonanzen der Ordnung zwei, drei, bzw. vier. Die starke Resonanz zerstört das typische Hopf-Verhalten.

Der Imaginärteil des kritischen Floquet–Exponenten ω_c , bzw. der kritische Floquet–Multiplikator Λ_c , verknüpft die in dem System vorkommenden Parameter α , b und κ für das δ –geklickte System miteinander. So stellt Gl. (3.23a) mit (3.23b) und (5.2a) für $k = 0$ die Summe der kritischen Floquet–Multiplikatoren dar. Da durch Änderung der auftretenden Parameter der kritische Floquet–Exponent ω_c in beliebige Verhältnisse zu der Frequenz des äußeren treibenden Feldes Ω gebracht werden kann, können wir durch geeignete Variation der Parameter die Bedingungen für die starke Resonanz erfüllen.

Oberhalb der Instabilitätsschwelle wird das Verhalten vermöge einer nicht eichinvarianten Amplitudengleichung beschrieben. Die Untersuchung von einigen nicht phaseninvarianten Gleichungen ist in niedrig dimensionalen physikalischen Systeme für parametrische Resonanzen der Ordnung zwei mit endlichen kritischen Wellenzahlen q_c durchgeführt (s. z.B. [ArKr], [CoEm], [CLHL], [CoPl], [Miln] und [FrGi]). Wir werden uns im Folgenden starken Resonanzen zuwenden.

7.1 Quartische Hopf–Instabilität

Die Bedingung, dass der Imaginärteil des Floquet–Exponenten ω_c bzw. der kritische Floquet–Multiplikator Λ_c mit der Frequenz des treibenden Feldes zusammen hängt, lässt sich für unser System, welches wir durch die komponentenweise Zerlegung der komplexen Größe ϕ aus der stereographischen Projektion auf ein zweidimensionales System überführt haben, anschaulich deuten. Wir befinden uns auf der Hopf–Bifurkationslinie, die wir mit Hilfe von Gl. (3.11a) und (3.11b) ganz allgemein bestimmt haben. Von Interesse ist Gl. (3.11b), da die Spur des Zeitentwicklungsoperators zur Zeit T ja gerade die Summe der Floquet–Multiplikatoren darstellt:

$$\text{Sp}\underline{\underline{U}}(T, q_c) = \Lambda + \Lambda^* = e^{i\omega_c T} + e^{-i\omega_c T} = 2 \cos \omega_c T \quad (7.1)$$

Wir können anhand von (7.1) feststellen, wo die beiden Floquet–Multiplikatoren den Einheitskreis, der die Stabilitätsgrenze bildet, schneiden und erhalten folgende starke Resonanzen:

- **Starke Resonanz der Ordnung zwei**, d.h. $\omega_c = \frac{\Omega}{2}$
Dann folgt für die Floquet–Multiplikatoren aus Gl. (7.1)

$$\Lambda + \Lambda^* = -2 \quad (7.2)$$

d.h. beide Floquet–Multiplikatoren sind reell und es gilt $\Lambda = \Lambda^* = -1$. Dann liegt in diesem Punkt eine Bifurkation höherer Kodimension vor. Um das Verhalten oberhalb dieser Schwelle zu beschreiben, benötigen wir im Ansatz nicht eine, sondern zwei Amplitudengleichungen. In der Störungsreihenentwicklung wird sich dann ein System zweier gekoppelter, nicht phaseninvarianter Amplitudengleichungen herausbilden [CrHo], [DoFa].

- **Starke Resonanz der Ordnung drei**, d.h. $\omega_c = \frac{\Omega}{3}$

Hier wird Gl. (7.1) zu

$$\Lambda + \Lambda^* = -1 \quad (7.3)$$

Die kritischen Floquet–Multiplikatoren liegen auf dem Einheitskreis unter den Winkeln $\frac{2}{3}\pi$ bzw. $-\frac{2}{3}\pi$. Der streng formale Amplitudengleichungsformalismus führt dabei, wie in [Jual] erwähnt, zu keinem befriedigendem Resultat, da die Säkularbedingung auf allen Skalen nicht erfüllt werden kann. Eine Alternative zur Behandlung des Problems ist das Averaging–Verfahren für das reskalierte System [NaMo].

- **Starke Resonanz der Ordnung vier**, d.h. $\omega_c = \frac{\Omega}{4}$

Hierbei wird Gl. (7.1) zu

$$\Lambda + \Lambda^* = 0 \quad (7.4)$$

d.h. beide Floquet–Multiplikatoren sind rein imaginär und liegen auf dem Einheitskreis bei i und $-i$. Wir können hierfür eine Amplitudengleichung mittels des bereits vorgestellten Formalismus aus [Jual] bestimmen. Wir werden uns im Folgenden auf die Analyse dieser quartischen Resonanz konzentrieren.

7.1.1 Bifurkationsbedingung

Wir haben bereits in Abschnitt 5.2 die Hopf–Bifurkation vorgestellt und untersucht. Um die starke Resonanz der Ordnung vier zu garantieren, bedarf es der Bedingung aus Gl. (7.1) mit Gl. (7.4). Wir kennen bereits die Form von $\text{Sp}\underline{U}(T, k)$ aus Gl. (3.23a), inklusive der darin enthaltenen Funktion, die für die Hopf–Bifurkation die Gestalt $p(T, q_c) = 1$ und $q(T, q_c)$ aus Gl. (5.2a) bzw. (6.63) annehmen. Dann erhalten wir aus der Forderung für die starke Resonanz aus Gl. (7.4) folgende zusätzliche Bedingungsgleichung an die beteiligten Parameter:

$$0 = q(T, q_c) = \cos \omega T \cos \kappa - \frac{\alpha - \frac{b}{2}}{\omega} \sin \omega T \sin \kappa \quad (7.5)$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass der Parameter κ durch die Erfüllung der Hopf-Bedingung aus Gl. (5.3) durch die Parameter α , b und T bestimmt wird. Die Abkürzung ω stellt die bereits bekannte und oft benutzte Funktion ω aus (5.2b) (für $k = 0$) dar. Wir werden die neu hinzukommende Bedingungsgleichung (7.5) für den Fall $\kappa = \pi$ in Abschnitt 7.2 auswerten und dabei feststellen, dass Gl. (7.5) in eine Bedingungsgleichung an den Parameter b , d.h. an die Anisotropie, mündet.

Wir werden uns aber zuerst der jetzt ergebenden Amplitudengleichung zuwenden.

7.1.2 Amplitudengleichung

Der Formalismus zur Herleitung von Amplitudengleichungen ist etabliert, und wir orientieren uns an der Vorgehensweise aus dem vorangegangenen Kapitel. In der Störungsentwicklung stellen wir fest, dass wir bei Anwendung der Säkularbedingung zusätzlich zum nicht resonanten Fall aus Kap. 6 die Terme mit Frequenzen $\pm 3\omega_c$ berücksichtigen müssen.

Sie resultieren aus den Termen A^{*3} der kubischen Nichtlinearität. Diese besitzen den Faktor $\exp(-i3\omega_c T)$, der wegen der starken Resonanzbedingung $-3\omega_c + \Omega = \omega_c$ die gleiche Periodizität wie die Grundmode $\exp(i\omega_c t)$ aufweist, da die Bedingung $-3\omega_c + \Omega = \omega_c$ erfüllt ist.

Dadurch erhalten wir einen zusätzlichen Beitrag in der Amplitudengleichung, der bereits in [Jual] angegeben wird. Aus der formalen Herleitung erhalten wir die Amplitudengleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_2} - v \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) A = \eta A + D \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + r |A|^2 A + s A^{*3} \quad . \quad (7.6)$$

Die bereits bekannten Koeffizienten berechnen sich nach den bereits angegebenen Beziehungen aus Gl. (6.18a) für v , Gl. (6.18c) für D , Gl. (6.18d) für r und Gl. (6.18b) für η , wobei im konkreten Falle hierbei die zusätzliche Bedingung an die Parameter b aus der Resonanzbedingung (7.4) zu berücksichtigen ist.

Der neu hinzugekommene, nichtlineare Koeffizient s bestimmt sich zu

$$s = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{v}_c(t) \mid \boldsymbol{\delta}(t)) dt \quad (7.7)$$

Hierbei setzt sich der Vektor $\boldsymbol{\delta}(t)$ im Falle der kubischen Nichtlinearitäten gerade aus denjenigen Komponenten zusammen, die mit A^{*3} koppeln.

Die Amplitudengleichung (7.6) ist nicht phaseninvariant. Leider sind allgemeine Aussagen über das Lösungsverhalten in der einschlägigen Literatur nicht vorhanden. Wir werden aber alle auftretenden Koeffizienten für das δ -gekickte System berechnen und sie im Grenzfall kleiner Dämpfung betrachten. Wir wenden uns jetzt erst der Berechnung des neu hinzugekommenen Koeffizienten zu.

7.1.3 Berechnung des nichtlinearen Koeffizienten s

Wir gehen bei der Berechnung des Koeffizienten s analog zur Berechnung des nichtlinearen Koeffizienten r aus Abschnitt 6.3 vor. Den aufwändigen Teil der Rechnung, d.h. die Bestimmung der explizit zeitabhängigen, kritischen Eigenvektoren $\mathbf{u}_c(t)$ bzw. $\mathbf{v}_c(t)$ haben wir bereits im Zusammenhang mit der Bestimmung der nicht resonanten Amplitudengleichung im Kapitel 6 durchgeführt (s. Abschnitt 6.3.2 mit Gln. (6.48), mit (6.50a) — (6.52d)). Wir können deshalb direkt von dem stufenförmig treibenden Feld ausgehen, das Integral aus Gl. (7.7) berechnen und dann den Grenzübergang zum δ -gekickten System durchführen.

Zuerst wenden wir uns der Bestimmung des Skalarprodukts $(\mathbf{v}_c(t)|\boldsymbol{\delta}(t))$ aus Gl. (7.7) zu. Wir gehen analog zur Vorgehensweise bei der Bestimmung von $(\mathbf{v}_c(t)|\boldsymbol{\Delta}(t))$ aus Abschnitt 6.3.3 vor.

Zur Bestimmung der Nichtlinearität von $\boldsymbol{\delta}(t)$ aus der Bewegungsgleichung (6.1) mit dem Ansatz (6.10) müssen wir uns jetzt in dritter Ordnung in ε auf die Terme mit A^{*3} konzentrieren, da sich der Term $\exp(-3i\omega_c t)$ vermöge der Resonanzbedingung in $\exp(-3i\omega_c t) = \exp(-i\Omega t) \exp(i\omega_c t)$ aufspalten lässt. Dadurch erhalten wir einen weiteren resonanten Beitrag, der nach Ausnutzen der Säkularbedingung auf den zusätzlichen Beitrag in der Amplitudengleichung (7.6) führt.

Das Aufsammeln der in Frage kommenden Terme erfolgt analog zu dem Verfahren aus Abschnitt 6.3.3. Dazu bedienen wir uns wiederum der Darstellung in sphärischen Koordinaten. Wir erhalten dann für $(\mathbf{v}_c(t)|\boldsymbol{\delta}(t))$:

$$\left(\mathbf{v}^{(+)}(t) \mid \boldsymbol{\delta}(t)\right) = 2 \left(\mathbf{u}^{(+)}(t) \mid \mathcal{C} \mathbf{u}^{(-)}(t)\right) \left(\mathbf{v}^{(+)}(t) \mid \mathcal{B} \mathbf{u}^{(-)}(t)\right) e^{-i\Omega t} \quad (7.8)$$

mit den Operatoren \mathcal{B} und \mathcal{C} , wie sie bereits in (6.60) bei der Berechnung des Koeffizienten r eingeführt wurden.

Damit ergibt sich für den Koeffizienten s

$$s = \frac{2}{T} \int_0^T dt e^{-2i\Gamma\xi(t)-i\Omega t} (\tilde{\mathbf{u}}^{(+)}(t) \mid \mathcal{C} \tilde{\mathbf{u}}^{(-)}(t)) (\tilde{\mathbf{v}}^{(+)}(t) \mid \mathcal{B} \tilde{\mathbf{u}}^{(-)}(t)) \quad (7.9)$$

mit $\xi(t)$ aus (6.61). Beim Auswerten von Gl. (7.9) benutzen wir wieder die Matrixdarstellung Gl. (6.40) für die Operatoren \mathcal{B} und \mathcal{C} sowie die Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ aus Gl. (6.48) in sphärischen Komponenten. Wir erhalten unter Ausnutzung der Normierungs- und Orthogonalitätsrelationen (s. Anhang E) aus (7.9)

$$s = -\frac{4i}{T} \int_0^T dt e^{-2\Gamma\xi(t)-i\Omega t} \left[2\left(a - \frac{b}{2}\right) \tilde{u}_+^{*2}(t) \tilde{u}_-^{*2}(t) - \frac{b}{2} \tilde{u}_+^*(t) \tilde{u}_-^*(t) \left(\tilde{u}_+^{*2}(t) + \tilde{u}_-^{*2}(t) \right) \right] \quad (7.10)$$

Übergang zum δ -Kick

Wir führen für den Ausdruck (7.10) hier wie in Abschnitt 6.3.5 den Grenzübergang zum δ -gekickten Fall durch. Dabei gehen wir genauso vor, wie es bereits in Abschnitt 6.3.5 beschrieben wird. Beachten wir die dort durchgeführten Grenzübergänge, insbesondere die Form (6.67a) und (6.67b) der Eigenvektorkomponenten und die Tatsache, dass die Zeitintegrale einfache Fourierintegrale werden, so erhalten wir

$$s = -\frac{4i}{T} \left\{ I(0) L_0 + I(2\omega) L_2 + I(-2\omega) L_{-2} + I(4\omega) L_4 + I(-4\omega) L_{-4} \right\} \quad (7.11)$$

wobei

$$\begin{aligned} I(k\omega) &= \int_0^T dt e^{-2\Gamma\xi(t)-i\Omega t} e^{ik\omega t} \Big|_{t_1 \rightarrow 0, \kappa \neq 0} \\ &= \frac{1}{i(k\omega T - 2\pi) - 2\Gamma\kappa} [e^{ik\omega T} - e^{2\Gamma\kappa}] \end{aligned} \quad (7.12)$$

ist. Die Koeffizienten L_0 bis L_{-4} haben wir in Anhang G angegeben

Wir halten fest, dass im Falle der starken Resonanz die Anzahl der variierbaren Parameter beschränkt wird. Wegen der Hopf-Bifurkationsbedingung aus Gl. (5.3) und der Bedingungsgleichung (7.5) an die starke Resonanz bleiben nur drei Parameter übrig (hier: T , Γ und κ). Alle anderen Parameter sind festgelegt. Wir wenden uns jetzt einer weiteren Vereinfachung der Koeffizienten zu, indem wir den Entartungspunkt $\kappa = \pi$ betrachten.

7.2 Koeffizienten am Entartungspunkt der Hopf-Bifurkationslinie

Wie wir bereits in der Diskussion der Koeffizienten im nicht resonanten Fall in Abschnitt 6.5 gesehen haben, ergeben sich für $\kappa = \pi$ einfachere Ausdrücke.

Wir betrachten nun diesen wichtigen Punkt. Im Falle verschwindender Dämpfung wird der Punkt vom Kreuzungspunkt zweier sich umschlingender Soft-mode-Bifurkationslinien gebildet, der aber bei endlicher Dämpfung aufbricht.

Im Falle der starken Resonanz erhalten wir wesentlich einfachere Ausdrücke für alle Koeffizienten der Amplitudengleichung aus Gl. (7.6). Dabei spielt die bereits erwähnte zusätzliche Bedingungsgleichung an den Parameter des Anisotropiefeldes eine wichtige Rolle. Fordern wir $\kappa = \pi$ in der Bedingungsgleichung (7.5), so erhalten wir mit der Definition des bekannten ω aus Gl. (5.2b) (für $k = 0$) aus Gl. (7.5)

$$b = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{3}{1+\Gamma^2}} \quad . \quad (7.13)$$

Setzen wir $\kappa = \pi$ in (6.69) ein, so sehen wir mit der Bedingungsgleichung (7.4), dass wir $\omega T = \pi/2$ setzen müssen. Mit diesen Kenntnissen über ωT und b wenden wir uns nun den einzelnen Koeffizienten zu.

– **Linearer Koeffizient η :**

Aus dem Realteil von η aus Gl. (6.71a) und dem Imaginärteil von η aus Gl. (6.71b) folgt mit (7.13) und $\omega T = \pi/2$

$$\text{Re } \eta = \frac{\Gamma}{T} \delta\kappa \quad \text{und} \quad \text{Im } \eta = \frac{2}{T} \delta\kappa \quad . \quad (7.14)$$

– **Diffusiver Koeffizient D :**

Wir erhalten für den Realteil von D aus Gl. (6.72a) und für den Imaginärteil von D aus Gl. (6.72b) mit (7.13) und $\omega T = \pi/2$

$$\text{Re } D = -\Gamma J \quad \text{und} \quad \text{Im } D = \frac{2J}{T} \quad . \quad (7.15)$$

– **Nichtlinearer Koeffizient r :**

Wir betrachten r aus (6.76) mit der Amplitude C aus (6.73), wenden (7.13) und $\omega T = \pi/2$ darauf an und erhalten:

$$\text{Re } r = \frac{2}{\pi} (e^{2\Gamma\pi} - 1) \left[2 \left(a - \frac{\pi}{2T} \sqrt{\frac{3}{1+\Gamma^2}} \right) |C|^2 - \frac{\pi}{2T} \sqrt{\frac{3}{1+\Gamma^2}} (C^2 + C^{*2}) \right] \quad (7.16a)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Im } r = & \frac{2}{\Gamma\pi} (e^{2\Gamma\pi} - 1) \left[\frac{\pi}{T} \left(\Gamma + \frac{1}{4} \right) \sqrt{\frac{3}{1+\Gamma^2}} |C|^2 (C^2 + C^{*2}) \right. \\ & \left. - 2(2\Gamma + 1) \left(a - \frac{\pi}{2T} \sqrt{\frac{3}{1+\Gamma^2}} \right) |C|^4 \right] \quad (7.16b) \end{aligned}$$

sowie

$$C = \frac{\Gamma - i}{\sqrt{2(\Gamma^2 + 1)}} \quad . \quad (7.16c)$$

– Der **zusätzliche nichtlineare Koeffizient** s :

Im Fall $\kappa = \pi$ gilt für die komplexen Amplituden $A^+ = B^- = 0$, so dass sich die Koeffizienten L_i (s. Anhang G) in Gl. (7.11) vereinfachen. Die verbliebenen Amplituden lassen sich, wie wir es bereits gesehen haben, durch die komplexe Amplitude C aus (6.73) beschreiben.

Wir erhalten am Entartungspunkt aus (7.11)

$$s = -\frac{4i}{T} C^{*4} \left[\left(a - \frac{b}{2}\right) I(0) - \frac{b}{2} (I(2\omega) + I(-2\omega)) \right] \quad (7.17)$$

mit $I(k\omega)$ aus Gl. (7.12) und $\kappa = \pi$. Setzen wir daraufhin in Gl. (7.17) die für den Entartungsfall gültige einfache Form der Amplitude C aus Gl. (7.16c) ein, so erhalten wir mit $\omega T = \pi/2$ und (7.13) den kompletten Ausdruck

$$\begin{aligned} s = & -\frac{i}{T} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{(\Gamma + i)^4}{(\Gamma^2 + 1)^2} \left[\left(a - \frac{\pi}{2T} \sqrt{\frac{3}{1+\Gamma^2}}\right) \frac{1}{2\pi(\Gamma + i)} (e^{2\Gamma\pi} - 1) \right. \\ & \left. - \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{3}{\Gamma^2 + 1}} (e^{2\Gamma\pi} + 1) \frac{i + \Gamma}{(i + 2\Gamma)(3i + 2\Gamma)} \right] \end{aligned} \quad (7.18)$$

Ein interessanter Punkt zur weiteren Untersuchung ist der Grenzfall kleiner Dämpfung für die nichtlinearen Koeffizienten r und s . Dies werden wir im nächsten Unterabschnitt untersuchen.

7.2.1 Entwicklungen nach kleinen Dämpfungen

Wir werden jetzt die nichtlinearen Koeffizienten r aus Gl. (7.16a) und (7.16b) sowie s aus (7.18) im Limes kleiner Dämpfungen untersuchen. Dazu ist es notwendig, alle auftretenden Größen in r und s nach kleinen Dämpfungen Γ zu entwickeln. Dabei ist zu berücksichtigen, dass aus Gl. (7.16c) $C = -i/\sqrt{2} + \Gamma/\sqrt{2} + \mathcal{O}(\Gamma^2)$ folgt.

Wir erhalten für den nichtlinearen Koeffizienten im Limes kleiner Dämpfungen für den Realteil $\text{Re } r$ aus (7.16a)

$$\text{Re } r = 4 \Gamma a + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (7.19a)$$

und für den Imaginärteil $\text{Im } r$ aus (7.16b)

$$\text{Im } r = \frac{\sqrt{3}\pi}{2T} - 2a + \Gamma \left(\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2T} - 2a(2 + \pi) \right) + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (7.19b)$$

Wir sehen, dass in führender Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^0)$ der Koeffizient r rein imaginär ist (s. Gl. (7.19b)). Erst in der ersten Ordnung in Γ tritt ein nichtverschwindender Realteil aus Gl. (7.19a) hinzu.

Wir führen nun die gleiche Entwicklung an der Gleichung (7.18) für den kompletten Ausdruck von s durch und erhalten im Limes kleiner Dämpfungen:

$$\text{Re } s = \frac{27\sqrt{3}\pi}{4T^2} + \Gamma \left[\left(\frac{3}{2} \right)^4 \frac{1}{T} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2T} - a \right) + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{3\sqrt{3}\pi^2}{T^2} \right] + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (7.20a)$$

$$\text{Im } s = -\Gamma \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{7\sqrt{3}\pi}{T^2} + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (7.20b)$$

Wir sehen hier nun im Gegensatz zur Entwicklung des Koeffizienten r , dass in führender Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^0)$ der Koeffizient s rein reell ist (s. Gl. (7.20a)). Erst in der ersten Ordnung in Γ tritt ein nichtverschwindender Imaginärteil aus Gl. (7.20b) hinzu.

Im Grenzfall verschwindender Dämpfung, $\Gamma = 0$, liefern die Gln. (7.14), (7.16b) mit (7.16a) und (7.15) rein imaginäre Werte für η , r und D sowie einen reellen Wert für den Koeffizienten s , der durch die starke Resonanzbedingung induziert wurde. Damit nimmt die sich ergebende Amplitudengleichung in der Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^0)$ die Form

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = i \text{Im } \eta A + i \text{Im } r A |A|^2 + \text{Re } s (A^*)^3 + i \text{Im } D \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} \quad (7.21)$$

an.

Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, dass es sich bei Gl. (7.21) in diesem Grenzfall um ein Hamiltonsches System handelt. So ergibt sich für den räumlich homogenen Beitrag in Gl. (7.21), d.h. unter Nichtberücksichtigung des diffusiven bzw. dispersiven Beitrags, ein zweidimensionales Hamiltonsches Gleichungssystem mit zugehöriger Hamiltonfunktion

$$H(p, q) = \frac{\text{Im } \eta}{2} (p^2 + q^2) + \frac{\text{Im } r}{4} (p^2 + q^2)^2 + \text{Re } s (p q^3 - q p^3) \quad (7.22)$$

wenn wir uns der Variablenabkürzung $A = p + iq$ bedienen. In diesem Sinne kann Gl. (7.21) im Grenzfall $\Gamma = 0$ als eine modifizierte nichtlineare Schrödingergleichung aufgefasst werden, in der die Eichinvarianz gebrochen ist. Im Falle endlicher Dämpfung wird diese dann durch die jeweiligen endlichen Real- bzw. Imaginärteile der Koeffizienten, hier also physikalisch begründet, durch dissipative Beiträge ergänzt.

Über Lösungseigenschaften einer solchen Gleichung ist allerdings in der Literatur sehr wenig bekannt. Das stellt somit sicherlich einen weiterführenden Aspekt dar, der aber hier nicht weiterverfolgt wird.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir anhand eines durch eine festkörperphysikalische Fragestellung motivierten Modellsystems die parametrischen Instabilitäten untersucht, die in extern getriebenen, periodisch zeitabhängigen Systemen auftreten. Besonderes Augenmerk haben wir dabei auf die effektive Dynamik jenseits der Instabilität gelegt, die im Rahmen einer schwach nichtlinearen Analyse in die Ableitung einer Bewegungsgleichung für die langsamen, relevanten Freiheitsgrade, d.h. in einer Amplitudengleichung mündet. Insbesondere wurde der Einfluss starker Resonanzen auf die sich ergebende Amplitudengleichung analysiert.

Ausgangspunkt der Überlegungen bildete ein magnetisches System, dessen Magnetisierungsdynamik durch die Landau–Lifschitz–Gleichung beschrieben wird. Im dabei auftretenden effektiven Feld wurden eine biaxiale Anisotropie, eine kurzreichweitige Austauschwechselwirkung, ein statisches sowie ein dazu paralleles, zeitlich veränderliches, Magnetfeld berücksichtigt. Durch die biaxiale Anisotropie, die modellmäßig den Einfluss der Dipolarwechselwirkung beschreiben kann, ist die Rotationssymmetrie gebrochen. In der hier gewählten Form stellt das Modell eine Minimalbeschreibung dar. Das gewählte Modell weist strukturelle Ähnlichkeiten zu Reaktions–Diffusionssystemen auf, so dass die hier durchgeführte Analyse nicht einzig auf die Klasse der magnetischen Systeme beschränkt ist.

In einem ersten Schritt wurde anhand eines stufenförmigen, periodisch treibenden Feldes das Stabilitätsverhalten der homogenen Magnetisierung mit Hilfe des zugehörigen, vollkommen analytisch behandelbaren, explizit zeitabhängigen Eigenwertproblems formuliert. Anschließend wurde die Wahl des treibenden Feldes dahingehend optimiert, um einen größtmöglichen Existenzbereich einer Hopf–Instabilität zu gewährleisten. Erst durch diese Über-

legungen wird es ermöglicht, den Einfluss starker Resonanzen auf das Instabilitätsverhalten zu diskutieren. Die erwähnte Anforderung schließt symmetrisch treibende Felder aus, und führt als optimale Wahl auf ein treibendes Feld, das aus in der Zeit periodisch wiederkehrenden δ -Kicks besteht.

Mit dieser Wahl des treibenden Feldes wurde das Stabilitätsverhalten der homogenen Magnetisierung vollständig analytisch diskutiert und in Form eines Bifurkationsdiagramms (s. z.B. Abb. 5.6) dargestellt. Dabei wurde explizit der Einfluss der Dämpfung auf die Ausbildung der Instabilitätslinien sowie die Existenz mehrerer Soft-mode-Bifurkationslinien nachgewiesen. Weiterhin konnten in dem komplexen Diagramm durch spezielle Wahl der treibenden Feldstärke Bereiche einer Hopf-Instabilität identifiziert werden.

Das Verhalten jenseits der Instabilitäten wurde mit Hilfe einer schwach nichtlinearen Analyse untersucht, aus der man eine Amplitudengleichung erhält. Wir haben uns dabei auf den Fall der Hopf-Instabilität konzentriert. Die Koeffizienten der Amplitudengleichung, die die Physik des Systems jenseits der Instabilität beschreiben, wurden vollständig analytisch bestimmt, insbesondere deren Abhängigkeit von den Parametern des Modellsystems. Im Grenzfall kleiner Dämpfungen erhalten wir aus der Amplitudengleichung eine nichtlineare Schrödingergleichung.

Durch eine zusätzliche Bedingung an das Verhältnis der Frequenz des treibenden Feldes zur Frequenz der linear instabilen Mode können wir in dem Modell das Auftreten starker Resonanzen garantieren. Diese führen zu einer fundamentalen Modifikation des dynamischen Verhaltens jenseits der Schwelle, was sich in nicht eichinvarianten Termen in der zugehörigen Amplitudengleichung niederschlägt. Wir haben in dieser Arbeit die starke Resonanz vierter Ordnung genauer untersucht und dabei alle Terme der auftretenden Amplitudengleichung bestimmt. Im Grenzfall verschwindender Dämpfung geht die nicht eichinvariante Amplitudengleichung in eine modifizierte nichtlineare Schrödingergleichung über, deren Untersuchung eine lohnenswerte Aufgabe zukünftiger Arbeiten darstellt.

Anhang A

Stereographische Projektion

Eine stereographische Projektion ordnet jedem Punkt der Einheitskugel einen Punkt in einer (komplexen) Zahlenebene zu, die die Kugel in ihrem Äquator schneidet. Die Projektionsvorschrift verbindet den zu projizierenden Punkt mit dem Südpol der Einheitskugel durch eine (unendliche) Gerade. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der (komplexen) Zahlenebene stellt den Bildpunkt dar (siehe Abb. (A.1)).

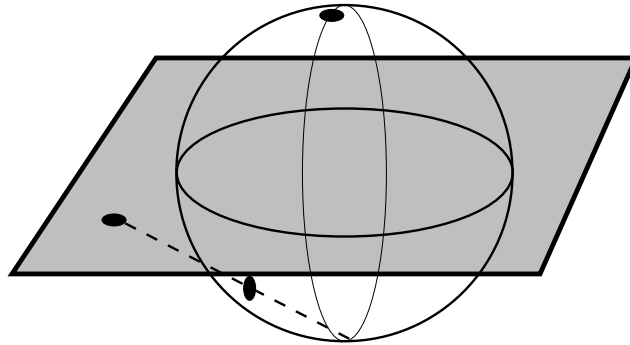


Abbildung A.1: Stereographische Projektion

Bezeichnet (x, y, z) den Punkt auf der Einheitskugel und $\phi \in \mathbb{C}$ den Bildpunkt, so lässt sich die Zuordnung mathematisch vermöge

$$\phi = \frac{x + iy}{1 + z} \quad (\text{A.1})$$

darstellen. Die Rücktransformation lautet

$$x = \frac{\phi + \bar{\phi}}{1 + |\phi|^2} \quad y = -i \frac{\phi - \bar{\phi}}{1 + |\phi|^2} \quad z = \frac{1 - |\phi|^2}{1 + |\phi|^2} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Anhang B

Pauli–Spinmatrizen

Die Eigenschaften der Pauli–Spinmatrizen im Einzelnen lauten:

$$\text{Sp} \underline{\underline{\sigma}}_i = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{\sigma}}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \underline{\underline{\sigma}}_k \quad (\text{B.1b})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^2 = \underline{\underline{1}} \quad (\text{B.1c})$$

Gl. (B.1a) beschreibt die Spurlosigkeit der Matrizen, während Gl. (B.1b) für das Verschwinden des Antikommutators zweier Spinmatrizen verantwortlich ist. Gl. (B.1c) liefert die Tatsache, dass das Quadrat einer Spinmatrix die Einheitsmatrix liefert. Entwicklung der Exponentialfunktion aus Gl. (3.21a) in eine Taylor–Reihe ergibt:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} t} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} t)^{\nu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu)!} (\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} t)^{2\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+1)!} (\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma})^{2\mu} \mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} \\ &= \cosh ct \underline{\underline{1}} + \frac{\sinh ct}{c} \mathbf{m} \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

mit

$$c = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Berechnung von c :

Aus Gl. (3.17a) und Gl. (3.18) folgt

$$m_1 \underline{\underline{\sigma}}_1 + m_2 \underline{\underline{\sigma}}_2 + m_3 \underline{\underline{\sigma}}_3 = \underline{\underline{L}} - \frac{1}{2} (\text{Sp} \underline{\underline{L}}) \underline{\underline{1}} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Quadrieren und Spurbildung von Gl. (B.4) ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (B.1a) — (B.1c):

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{1}{2} \text{Sp} \left\{ \left(\underline{\underline{L}} - \frac{1}{2} (\text{Sp} \underline{\underline{L}}) \underline{\underline{1}} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\underline{\underline{L}}^2) - \frac{1}{4} (\text{Sp} \underline{\underline{L}})^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$\text{Sp}(\underline{\underline{L}}^2) = (\text{Sp} \underline{\underline{L}})^2 - 2 \det \underline{\underline{L}} \quad (\text{B.6})$$

gilt. Dies können wir in Gl. (B.5) einsetzen und erhalten

$$c = \sqrt{\frac{1}{4} (\text{Sp} \underline{\underline{L}})^2 - \det \underline{\underline{L}}} \quad . \quad (\text{B.7})$$

Wir können diese Entwicklung auf die Berechnung der Spur des Zeitentwicklungsoperators $\underline{\underline{U}}(T, k)$ anwenden. Durch Einsetzen von Gl. (3.20) und Gl. (3.21a) in Gl. (3.15) mit entsprechenden Indizes erhalten wir:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}(T, k) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (\text{Sp} \underline{\underline{L}}_2) \underline{\underline{1}} (T - t_1) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} (\text{Sp} \underline{\underline{L}}_1) \underline{\underline{1}} t_1 \right\} \\ &\times \left[\cosh c_2(T - t_1) + \frac{\sinh c_2(T - t_1)}{c_2} \mathbf{m}_2 \boldsymbol{\sigma} \right] \left[\cosh c_1 t_1 + \frac{\sinh c_1 t_1}{c_1} \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ausmultiplizieren und Bildung der Spur von Gl. (B.8) unter Berücksichtigung von Gl. (B.1a) — (B.1c) liefert letztendlich Gl. (3.22a).

Anhang C

Entwicklung um den Berührungspunkt

Entwicklung der Terme von (5.36) in Hyperbel-Näherung

$$\cos \kappa = \cos(k \pi + \Delta \kappa) = 1 - \frac{(\Delta \kappa)^2}{2} + \dots \quad (\text{C.1a})$$

$$\sin \kappa = \sin(k \pi + \Delta \kappa) = \Delta \kappa + \dots \quad (\text{C.1b})$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p} + p) = 1 + \frac{\Gamma^2}{2} \left((\alpha_l - \frac{b}{2})T - k \pi \right)^2 + \dots \quad (\text{C.1c})$$

$$\cos \omega T|_{P_{kl}^{(\pm)}} = 1 - \frac{1}{2} \left(T \frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_l} \Delta \alpha \right)^2 + \dots \quad (\text{C.1d})$$

mit $\Delta \kappa = \Delta \kappa_{kl}^{(\pm)}$ und $\Delta \alpha = \Delta \alpha_{kl}^{(\pm)}$ nach Gln. (5.35b) und (5.35a) liefert nach einigen Umformungen letztendlich Gl. (5.37).

Anhang D

Entwicklung des linearen Operators

Für den linearen Koeffizienten η nach Gl. (6.18b) benötigen wir den linearen Operator $\mathcal{L}^{(2)}(t)$. Wir werden sehen, dass wir das Skalarprodukt gebildet mit $\mathcal{L}^{(2)}$ in Gl. (6.18b) in ein Skalarprodukt für die Ableitung des linearen Operators $\mathcal{L}^{(0)}$ nach einem Parameter κ an der Schwelle κ_c mit dem Abstand zur Schwelle $\varepsilon^2 \delta \kappa = \kappa - \kappa_c$ überführen können

Differentiation der Eigenwertgleichung (6.5) nach dem Parameter κ liefert ¹ für einen Floquet-Exponenten:

$$\mathcal{L}' \mathbf{u} + \mathcal{L} \mathbf{u}' = \mu' \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}' + \dot{\mathbf{u}}' \quad (\text{D.1})$$

Multiplikation der Eigenwertgleichung (D.1) mit \mathbf{v}^* ergibt

$$(\mathbf{v} | \mathcal{L}' \mathbf{u}) + (\mathbf{v} | \mathcal{L} \mathbf{u}') = \mu' (\mathbf{v} | \mathbf{u}) + \mu (\mathbf{v} | \mathbf{u}') + (\mathbf{v} | \dot{\mathbf{u}}') \quad (\text{D.2})$$

Aus Gl. (6.6) nach Multiplikation mit \mathbf{u}' folgt

$$(\dot{\mathbf{v}} | \mathbf{u}') = -(\mathbf{v} | \mathcal{L} \mathbf{u}') + \mu (\mathbf{v} | \mathbf{u}') \quad . \quad (\text{D.3})$$

Einsetzen von Gl. (D.3) in Gl. (D.2) ergibt

$$(\mathbf{v} | \mathcal{L}' \mathbf{u}) = \mu' (\mathbf{v} | \mathbf{u}) + \frac{d}{dt} (\mathbf{v} | \mathbf{u}') \quad . \quad (\text{D.4})$$

Anschließende Integration über t führt unter Berücksichtigung der T -Periodizität der Eigenvektoren \mathbf{v}^* und \mathbf{u}' auf

$$\int_0^T (\mathbf{v} | \mathcal{L}' \mathbf{u}) dt = \mu' \int_0^T (\mathbf{v} | \mathbf{u}) dt \quad . \quad (\text{D.5})$$

¹Die Differentiation nach κ wird wie folgt abgekürzt: $\frac{d}{d\kappa} = '$

An der Instabilitätsschwelle gilt $\kappa = \kappa_c$ und so können wir den Parameter knapp oberhalb der Schwelle entwickeln: $\kappa = \kappa_c + \varepsilon^2 \delta\kappa + \dots$. Wir können den linearen Operator \mathcal{L} daraufhin in eine Taylor-Reihe nach κ entwickeln und erhalten

$$\mathcal{L}(\kappa) = \mathcal{L}(\kappa_c) + \varepsilon^2 \mathcal{L}'(\kappa_c) \delta\kappa + \dots \quad (\text{D.6})$$

Vergleich mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathcal{L}^{(2)} + \dots$ liefert für den linearen Koeffizienten aus Gl. (6.18b) mit Gl. (D.5)

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{v} \mid \mathcal{L}'(\kappa_c) \mathbf{u}) dt \delta\kappa = \left. \frac{d\mu}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_c} \delta\kappa \quad . \quad (\text{D.7})$$

Anhang E

Orthogonalität und Normierung der Eigenvektoren $\mathbf{u}_c^{(\nu)}(t)$ und $\mathbf{v}_c^{(\nu)}(t)$

Aus der Relation

$$\Lambda_- = \Lambda_+^* \quad (\text{E.1})$$

der Floquet–Multiplikatoren bei einer Hopf–Bifurkation folgt die zentrale Relation zwischen den Eigenvektoren $\mathbf{u}^{(+)}(t)$ und $\mathbf{u}^{(-)}(t)$

$$\mathbf{u}_c^{(-)}(t) = \mathbf{u}_c^{(+)*}(t) \quad (\text{E.2})$$

oder in sphärischen Komponenten geschrieben:

$$u_-^{(-)}(t) = u_+^{(+)*}(t) \quad (\text{E.3a})$$

$$u_+^{(-)}(t) = u_-^{(+)*}(t) \quad (\text{E.3b})$$

Weiterhin benutzen wir in dieser Arbeit die Orthogonalitätsrelation¹

$$\left(\mathbf{v}_c^{(\nu)}(t) \mid \mathbf{u}_c^{(\nu')}(t) \right) = \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{E.5})$$

¹Die Orthogonalitätsrelation gilt für alle Zeiten t , denn aus den Bewegungsgleichungen (vgl. Gln. (6.5) und (6.6)) erhalten wir für die Rechts- und Linkseigenvektoren $\mathbf{u}_c^{(\nu)}$ bzw. $\mathbf{v}_c^{(\nu)}$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{L}}^{(0)}(t) \mathbf{u}_c^{(\nu)} &= \dot{\mathbf{u}}_c^{(\nu)} + \mu_\nu \mathbf{u}_c^{(\nu)} \\ \underline{\underline{L}}^{(0)}(t) \mathbf{v}_c^{(\nu)} &= -\dot{\mathbf{v}}_c^{(\nu)} + \mu_\nu^* \mathbf{v}_c^{(\nu)} \end{aligned}$$

bzw. ausgeschrieben in sphärischen Komponenten

$$v_+^{(\nu)*}(t) u_+^{(\nu)}(t) + v_-^{(\nu)*}(t) u_-^{(\nu)}(t) = 1, \quad \nu = \pm \quad (\text{E.6a})$$

$$v_+^{(+)*}(t) u_+^{(-)}(t) + v_-^{(+)*}(t) u_-^{(-)}(t) = v_+^{(-)*}(t) u_+^{(+)}(t) + v_-^{(-)*}(t) u_-^{(+)}(t) = 0 \quad (\text{E.6b})$$

Diese Relationen (E.3a) und (E.3b) lassen immer noch einen Faktor C offen. Es ist zweckmäßig, diesen Faktor C durch folgende Normierungsbedingung festzulegen:

$$\left| u_+^{(\nu)}(t) \right|^2 - \left| u_-^{(\nu)}(t) \right|^2 = \nu \quad (\text{E.7})$$

Aus Gl. (E.7) erhalten wir für $\nu = 1$ zusammen mit Gl. (E.5) die folgenden zentralen Relationen:

$$v_+^{(+)}(t) = u_+^{(+)}(t) \quad v_+^{(-)}(t) = -u_-^{(+)*}(t) \quad (\text{E.8a})$$

$$v_-^{(+)}(t) = -u_-^{(+)}(t) \quad v_-^{(-)}(t) = u_+^{(+)*}(t) \quad (\text{E.8b})$$

und folglich

$$v_+^{(-)}(t) = v_-^{(+)*}(t) \quad (\text{E.9a})$$

$$v_-^{(-)}(t) = v_+^{(+)*}(t) \quad (\text{E.9b})$$

mit $\mu_{\pm} = \pm i\omega_c$. Dieses Gleichungssystem lässt sich mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $\underline{\underline{U}}(t)$ formal integrieren und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c^{(\nu)}(t) &= \exp\{-\mu_{\nu}t\} \underline{\underline{U}}(t) \mathbf{u}_c^{(\nu)}(0) \\ \mathbf{v}_c^{(\nu)}(t) &= \exp\{\mu_{\nu}^*t\} (\underline{\underline{U}}^{-1})^{\dagger}(t) \mathbf{v}_c^{(\nu)}(0) \end{aligned}$$

woraus dann direkt folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_c^{(\nu)}(t) | \mathbf{u}_c^{(\nu')} (t)) &= \exp\{-(\mu'_{\nu} - \mu_{\nu})t\} (\mathbf{v}_c^{(\nu)}(0) | \underbrace{\underline{\underline{U}}^{-1}(t) \underline{\underline{U}}(t)}_{=1} \mathbf{u}_c^{(\nu')} (0)) \\ &= \exp\{-(\mu'_{\nu} - \mu_{\nu})t\} (\mathbf{v}_c^{(\nu)}(0) | \mathbf{u}_c^{(\nu')} (0)) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Anhang F

Die Produkte K_2 bis K_{-4}

Die Produkte K_2, \dots, K_{-4} geben wir mit der allgemeinen Form der Eigenvektorenkomponenten aus Gl. (6.67a) und Gl. (6.67b) an. Die allgemeine Form der Eigenvektorenkomponenten, die durch den Übergang zum δ -gekickten System einen Beitrag liefern, lauten:

$$\tilde{u}_+^{(+)}(t) = A^+ e^{i\omega T} + B^+ e^{-i\omega T} \quad (\text{F.1})$$

$$\tilde{u}_+^{(-)}(t) = A^- e^{i\omega T} + B^- e^{-i\omega T} \quad (\text{F.2})$$

wobei wir von der vereinfachten Notation $A^\pm := A_2^\pm$ (siehe Gl. (6.66b)) und $B^\pm := B_2^\pm$ (siehe Gl. (6.66d)) Gebrauch machen.

Somit erhalten wir aus Gl. (6.60) mit (6.62a) – (6.62d) mit Gl. (F.1) und Gl. (F.2) folgende Produkte:

$$\begin{aligned} K_2 = & -\Gamma \frac{b}{2} \left[1 - i \left[|A^+|^2 + |A^-|^2 + |B^+|^2 + |B^-|^2 \right] \right] [A^+ A^- + B^{+*} B^{-*}] \\ & + i \frac{b}{4} \left[2 [A^+ B^+ + A^{-*} B^{-*}] A^- B^{+*} \right. \\ & \left. + [A^- A^{+*} + B^{+*} B^-] [A^{+2} + B^{-*2}] \right] \end{aligned} \quad (\text{F.3a})$$

$$\begin{aligned} K_{-2} = & -\Gamma \frac{b}{2} \left[1 - i \left[|A^+|^2 + |A^-|^2 + |B^+|^2 + |B^-|^2 \right] \right] [A^{+*} A^{-*} + B^+ B^-] \\ & + i \frac{b}{4} \left[2 [A^+ B^+ + A^{-*} B^{-*}] A^{+*} B^- \right. \\ & \left. + [A^- A^{+*} + B^{+*} B^-] [A^{-*2} + B^{+2}] \right] \end{aligned} \quad (\text{F.3b})$$

$$K_4 = i \frac{b}{4} A^- B^{+*} [A^{+2} + B^{-*2}] \quad (\text{F.3c})$$

$$K_{-4} = i \frac{b}{4} A^{+*} B^- [A^{-*2} + B^{+2}] \quad (\text{F.3d})$$

Anhang G

Die Produkte L_0 bis L_{-4}

Aus Gl. (7.10) erhalten wir mit der Darstellung der Komponenten des Eigenvektors aus (6.50a) und (6.50b) nach Sortierung der Fouriermoden $e^{ik\omega t}$:

$$\begin{aligned}
 L_0 = & (a - \frac{b}{2}) \left[A^{+\ast 2} B^{-\ast 2} + 4A^{+\ast} A^{-\ast} B^{+\ast} B^{-\ast} + A^{-\ast 2} B^{+\ast 2} \right] \\
 & - \frac{b}{2} \left[A^{+\ast} A^{-\ast} (B^{+\ast 2} + B^{-\ast 2}) + B^{+\ast} B^{-\ast} (A^{+\ast 2} + A^{-\ast 2}) \right. \\
 & \left. + 2(A^{+\ast} B^{+\ast} + A^{-\ast} B^{-\ast}) (A^{+\ast} B^{-\ast} + A^{-\ast} B^{+\ast}) \right] \quad (G.1a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2 = & 2(a - \frac{b}{2}) \left[A^{+\ast} B^{+\ast} B^{-\ast 2} + A^{-\ast} B^{+\ast 2} B^{-\ast} \right] \\
 & - \frac{b}{2} \left[2B^{+\ast} B^{-\ast} (A^{+\ast} B^{+\ast} + A^{-\ast} B^{-\ast}) \right. \\
 & \left. (A^{+\ast} B^{-\ast} + A^{-\ast} B^{+\ast}) (B^{+\ast 2} + B^{-\ast 2}) \right] \quad (G.1b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{-2} = & 2(a - \frac{b}{2}) \left[A^{+\ast 2} A^{-\ast} B^{-\ast} + A^{+\ast} A^{-\ast 2} B^{+\ast} \right] \\
 & - \frac{b}{2} \left[2A^{+\ast} A^{-\ast} (A^{+\ast} B^{+\ast} + A^{-\ast} B^{-\ast}) \right. \\
 & \left. (A^{+\ast} B^{-\ast} + A^{-\ast} B^{+\ast}) (A^{+\ast 2} + A^{-\ast 2}) \right] \quad (G.1c)
 \end{aligned}$$

$$L_4 = (a - \frac{b}{2}) B^{+\ast 2} B^{-\ast 2} - \frac{b}{2} B^{+\ast} B^{-\ast} (A^{+\ast 2} + A^{-\ast 2}) \quad (G.1d)$$

$$L_{-4} = (a - \frac{b}{2}) A^{+\ast 2} A^{-\ast 2} - \frac{b}{2} A^{+\ast} A^{-\ast} (B^{+\ast 2} + B^{-\ast 2}) \quad (G.1e)$$

Die Amplituden $A^{\pm\ast} := A_2^{(\pm)\ast}$ sind in Gl. (6.66b) und die Amplituden $B^{\pm\ast} := B_2^{(\pm)\ast}$ sind in Gl. (6.66d) gegeben.

Literaturverzeichnis

- [Akhi] A. I. Akhiezer, V. G. Bar'yakhtar und S. V. Peletminskii; Spin Waves. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1968)
- [ArKr] I. S. Aranson, L. Kramer; The world of the complex Ginzburg-Landau equation. Rev. Mod. Phys. **74**, 99 (2002)
- [Arno] V. I. Arnold; Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer, Berlin (1980)
- [ArnV] V. I. Arnold [Ed.]; Dynamical Systems V. Springer, Berlin (1994)
- [Benn] J. Becker, F. Rödelsberger, Th. Weyrauch, H. Benner, W. Just, and A. Cenys; Intermittency in spin-wave instabilities, Phys. Rev. **E 59**, 1622 (1999)
- [BBCK] I. Białynicki-Birula, M. Cieplak, J. Kamiński; Theory of quanta. Oxford University Press, New York (1992)
- [CoEm] P. Coullet, K. Emilsson; Strong resonances of spatially distributed oscillators: a laboratory to study patterns and defects. Physica **D 61**, 119 (1992)
- [CLHL] P. Coullet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, J. Lajzerowicz; Breaking Chirality in Nonequilibrium Systems. Phys. Rev. Lett. **65**, 1352 (1990)
- [CoPl] P. Coullet, F. Plaza; Excitable spiral waves in nematic liquid crystals. Int. J. Bif. Chaos, **4**, 1173 (1994)
- [CrHo] M. C. Cross, P. C. Hohenberg; Pattern formation outside of equilibrium. Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993)
- [DoFa] S. Douady, S. Fauve, O. Thual; Oscillatory phase modulation of parametrically forced surface waves. Europhys. Lett. **10**, 309 (1989)

- [Fors] D. Forster; Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry, and correlation functions. Addison-Wesley(1990)
- [FrGi] T. Frisch, J. M. Gilli; Excitability and Defect-Mediated Turbulence in Nematic Liquid Crystal. J. Phys. II **5**, 561 (1995)
- [Gara] D. A. Garanin; Generalized equation of motion for a ferromagnet. Physica **A 172**, 470 (1991)
- [GuHo] J. Guckenheimer, P. Holmes; Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer (Applied Mathematical Sciences, **42**) (1983)
- [Jual] W. Just, F. Matthäus, H. R. Völger, C. Just, B. Rumpf, A. Riegert; Weakly nonlinear analysis in spatially extended systems as a formal perturbation scheme, preprint verfügbar über <http://xxx.lanl.gov/abs/patt-sol/9706006>
- [JMS] W. Just, F. Matthäus, H. Sauermann; On the degenerated soft mode instability. J. Phys. **A 31**, 5925 (1998)
- [Kubo] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume; Statistical Physics, 2. Nonequilibrium Statistical Mechanics. Springer (1991)
- [Kugl] J. Kugler; Ein neues Bifurkationsszenario: Die kombinierte Sattel-Knoten/Soft-mode Bifurkation. Dissertation, Darmstadt (2002)
- [KuTs] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki; On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems. Prog. Theo. Phys. **54**, 687 (1975)
- [LaLi] L. D. Landau, E. M. Lifshitz; On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. Phys. Z. Sowjet. **8**, 153 (1935) [Reprint in: Collected Papers of L.D. Landau; D. ter Haar (Hrsg.), Pergamonn Press, Oxford (1965)]
- [LiLi] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman; Regular stochastic motion. Springer (Applied mathematical sciences, **38**) (1983)
- [Lvov] V. S. L’vov; Wave turbulence under parametric excitation Springer (1994)
- [Mann] P. Manneville; Dissipative structures and weak turbulence. Academic Press (1990)

- [MaSa] F. Matthäus, H. Sauermann; Amplitude equations near pattern forming instabilities for stringly driven ferromagnets. *Z. Phys. B* **99**, 611 (1996)
- [KMay] K. Mayes; Dynamic Domains in Strongly Driven Ferromagnetic Films. Dissertation, Darmstadt (2002)
- [Miln] S. T. Milner; Square patterns and scondary instabilities in driven capillary waves. *J. Fluid Mech* **225**, 81 (1991)
- [Naka] K. Nakamura; Quantum chaos: a new paradigm of nonlinear dynamics. Cambridge Univ. Press (1993)
- [NaMo] A. H. Nayfeh, D. T. Mook; Nonlinear Oscillations. Wiley, New York (1979), p. 391
- [NeWh] A.C. Newell, J.A. Whitehead; Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 279 (1969)
- [Plef] T. Plefka; Nonlinear damping in spin systems: long range spin-spin interactions. *Z. Phys. B* **90**, 447 (1993)
- [Rieg] A. Riegert; Der Einfluss der Dipolarwechselwirkung auf die Nichtgleichgewichtsstrukturbildung in getriebenen ferromagnetischen Filmen. Dissertation, Darmstadt (2001)
- [Rob] C. Robinson; Dynamical Systems, stability, symbolic dynamics and chaos. CRC press (1995)
- [Suhl] H. Suhl; *J. Phys. Chem. Solids* **1**, 209 (1957)
- [Völg] H. R. Völger; Instabilitäten und Strukturbildungsprozesse in getriebenen Ferromagneten: Bifurkationsanalyse bei Brechung der Inversionssymmetrie. Dissertation, Darmstadt (1999)
- [Wige] P. E. Wigen [Ed.]; Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials. World Scientific (1994)

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Sauermann meinen Dank aussprechen für die Anregungen zu dieser Arbeit sowie für sein stetiges Interesse an ihrem Fortgang.

Herrn Priv. Doz. Dr. Wolfram Just und Herrn Dr. H. Turschner danke ich für die zahlreichen Diskussionen und Hilfestellungen, die wichtige Impulse für die Arbeit gegeben haben.

Weiterhin möchte ich mich für die Hilfsbereitschaft bei allen ehemaligen Mitgliedern dieser Arbeitsgruppe sowie für die Unterstützung von Mitgliedern benachbarter Theoriearbeitsgruppen des Instituts bedanken.

Schließlich danke ich allen, die Korrektur gelesen haben.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Bisher habe ich noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Darmstadt, im Dezember 2004

Lebenslauf

Christine Just Mathildenstrasse 44, 64285 Darmstadt
geboren am: 12.12.1964
Geburtsort: Darmstadt
Familienstand: ledig

1971 – 1975	Grundschule in Darmstadt
1975 – 1984	Gymnasium in Darmstadt
1984	Abitur
1984 – 1992	Studium der Physik an der TH Darmstadt
1992	Diplom in Physik, Diplomarbeit am Institut für Festkörperphysik zu einem Thema aus der Theorie
1994 – 2000	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Festkörperphysik der TU Darmstadt
08/2000 – 12/2000	Full time teacher für Mathematik an der FH Helsinki (Institute of Technology at the Helsinki Polytechnic)
03/2002 – 07/2002	Lehrauftrag für Physik an der FH Wiesbaden im Fachbereich Physikalische Technik
02/2003 – 08/2003	Vertretungsprofessur für Physik an der FH Wiesbaden im Fachbereich Physikalische Technik
seit 09/2003	Lehraufträge für Physik an der FH Wiesbaden im Fachbereich Physikalische Technik